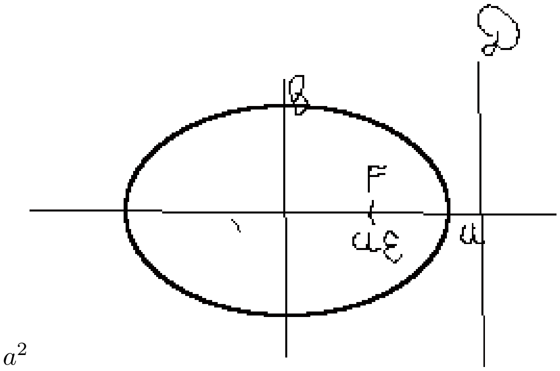
Эллипс (продолжение прошлой лекции):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t\in[0;2\pi)$$



Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},\quad x\geq a \qquad y'=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}>0$$

Рассмотрим $\tilde{y}=\frac{b}{a}x,\quad \tilde{y}-y=\frac{a}{b}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\tilde{y}=0 \implies$ наклонная касательная $\frac{b}{a}$

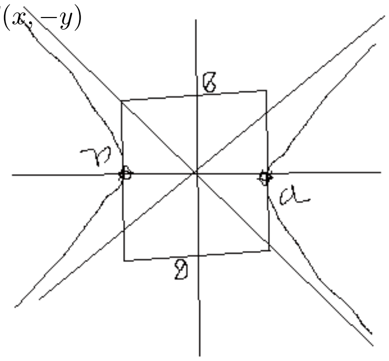
Директрисы: $\pm\frac{a}{\varepsilon},\quad$ Фокусы: $\pm a\varepsilon$

$$\begin{cases} x=\pm a\operatorname{ch} t \\ y=\pm b\operatorname{sh} t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Парабола

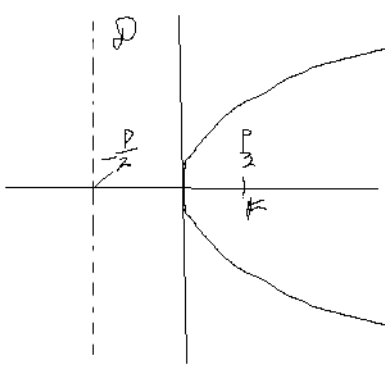
$y^2=2px,\quad$ Есть вертикальная симметрия относительно $Ox \implies F(x,y)=F(x,-y)$

$y=\sqrt{2px},\quad x\geq 0$



Фокальные СВОйства

.



Теорема (фокальное СВОйСтВО эллипса)

Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусв - величина постоянная и равна $2a$

ДокататeльСтВО Обозначим расстояние от точки до директрис $d1, d2$. $\frac{f_1}{d_1}=\varepsilon=\frac{f_2}{d_2} \implies f_1=\varepsilon d_1,\ f_2=\varepsilon d_2.\ f1+f2=\varepsilon(d_1+d_2)=\varepsilon(\frac{a}{\varepsilon}-\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right))=2a=const$

■

Получим уравнение эллипса из фокального СВОйства: $f_1+f_2=2a$

$f_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad f_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$(\cancel{x}+\cancel{c})^2+\cancel{y}^2-(\cancel{x}-\cancel{c})^2-\cancel{y}^2=2a\sqrt{(x+c)^2+y^2}-2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2xc}{a};\qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=(a+\frac{xc}{a})$

$x^2+c^2+2xc+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2+a+2cx \implies x^2(\frac{a^2-c^2}{a^2})+y^2=a^2-c^2 \implies \frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2,$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

■

Теорема (фокальное СВОйСтВО гиперболы)

Модуль разности расстояний от любой точки до фокусов постоянен и равен $2a$

ДоказательСтВО аналогично доказательству для эллипса и остаётся на упражнение читателю.

касательные к кривым второго порядка

Эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \qquad y'=\mp\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\mp\frac{\frac{x}{x^2}}{\pm\frac{y}{b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Уравнение касательной: $Y-y_0=k(X-x_0)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(X-x_0) \implies \frac{Yy_0}{b^2}+\frac{Xx_0}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}=1$

$X\frac{x_0}{a^2}+Y\frac{y_0}{b^2}=1$

Гипербола:

$X\frac{x_0}{a^2}-Y\frac{y_0}{b^2}=1$

Парабола:

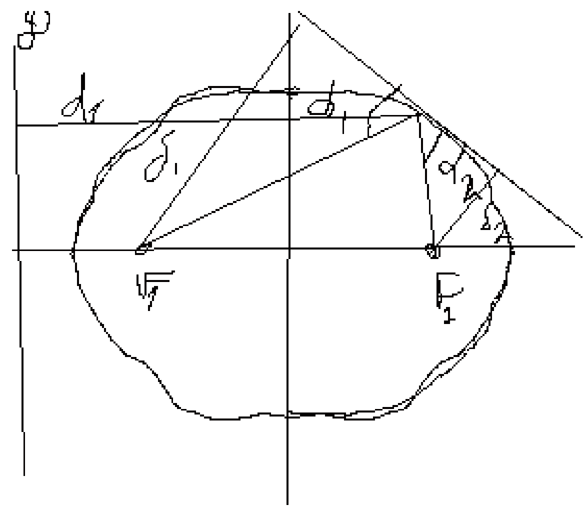
$y_0Y=P(x_0+X)$

Оптические СВОйства кривых второго порядка

Теорема (оптическое СВОйСтВО эллипса)

Фокальные радиусы образуют с касательной к эллипсу равные углы

Доказательство:



$X\frac{x_0}{a^2}+Y\frac{y_0}{b^2}=1$

$\delta=\beta\left|x\frac{x_0}{a^2}+y\frac{y_0}{b^2}-1\right| \qquad \beta$ - норм каеф (нормировочный коэфициент)

$F_1(-a\varepsilon,0),\ F_2(a\varepsilon,0) \implies \delta_1=\frac{\beta}{a}\varepsilon x_0+a, f_1=\varepsilon d_1=x_0\varepsilon+a$

$\sin\alpha_1=\frac{\delta_1}{f_1}=\frac{\frac{b}{a}(\varepsilon x_0+a)}{x_0\varepsilon+a}=\frac{b}{a}$