

Инварианты кривых 2 порядка в матричном представлении

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & C \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} R & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D' = P^T D P, A' = R^T A R.$$

$$|A'| = |R^T A R| = |R^T| \cdot |R| \cdot |A| = |A| = \delta$$

$$|D'| = |P^T| \cdot |P| \cdot |D| = [|P| = (-1)^{3+3} |R| \cdot 1 = |R| = 1] = |P|$$

Введём след матрицы: $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \text{tr } \begin{matrix} A & B \\ n \times m & m \times n \end{matrix} = \text{tr } B \cdot A$

$$\text{tr } A' = \text{tr } R^T A R = \text{tr } R R^T A = \text{tr } A = S$$

Мы доказали: $\delta = |A|, \Delta = |D|, S = \text{tr } A$ являются инвариантами уравнения кривой 2 порядка

Классификация кривых 2 порядка

Уравнение кривой: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots$. Избавимся от говна: $a'_{12} = 0!$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A' = R^T A R = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & -\cos \alpha \sin \alpha \cdot a_{11} - \sin^2 \alpha \cdot a_{12} + \cos^2 \alpha \cdot a_{12} + \cos \alpha \sin \alpha \cdot a_{22} \\ * & * \end{pmatrix}, a'_{12} = \cos \alpha \sin \alpha (a_{22} - a_{11}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) a_{12} =$$

$$= (a_{22} - a_{11}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + a_{12} \cos 2\alpha = 0 \implies \text{ctg } 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} - \text{то есть от этого говна ТООООЧНО можно избавиться!))))))$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \quad a_{11} \neq 0 \vee a_{22}, \text{ получаем } a_{11}x^2 + 2b_1x + \dots = a_{11} \left(x + \frac{b_1}{a_{11}} \right)^2 - \frac{b_1^2}{a_{11}} + \dots = [x = x' - \frac{b_1}{a_{11}}, y = y']$$

Если $a_{11} \neq 0 \implies b \rightarrow b_1 = 0$, Аналогично можем занулить b_2 , и получить $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \end{pmatrix},$

При этом последние 2 записи аналогичны при повороте на $\frac{\pi}{2}$

Для случая 2 получаем уравнение: $\alpha y^2 + 2\beta x + \gamma = 0 = [x' = x + \frac{\gamma}{2\beta}], \gamma' = 0$, Матрица: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} (\beta \neq 0)$

$$\beta = 0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

То есть все случаи вместе:

$$1. \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{matrix} \delta = \alpha\beta \neq 0 \\ \Delta = \alpha\beta\gamma \\ S = \alpha + \beta \end{matrix} \quad 2.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \delta = 0 \\ \Delta = -\alpha\beta^2 \\ S = \alpha \end{matrix} \quad 2.2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{matrix} \delta = 0 \\ \Delta = 0 \\ S = \alpha \end{matrix}$$

1. Центральная кривая: $\delta = |A| \neq 0$, уравнение: $\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma$

1.1 $\delta = 0, \text{sgn } \alpha = \text{sgn } \beta$ [обозначаем как $\alpha \sim \beta$] - эллиптический тип

1.1.1 $\alpha \sim \beta \not\sim \gamma \equiv \Delta \cdot S \leq 0$: И ЭТО **ЭЛЛИПС**! $\frac{x^2}{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{y^2}{-\frac{\gamma}{\beta}} = 1$

1.1.2 $\alpha \sim \beta \sim \gamma \equiv \Delta \cdot S \geq 0$: $\emptyset$ - то есть кривой не существует! (на $\mathbb{R}^2$), а ещё это **мнимый эллипс**

1.1.3 $\gamma = 0 \equiv \Delta = 0$: и это **точка** $\{0, 0\}$ (выоржденный эллипс)

1.2 $\delta < 0, \alpha \not\sim \beta$ - гиперболический тип

1.2.1 $\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$ - и это **гипербола**

1.2.2 $\gamma = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ - то есть это **две пересекающихся прямых**

2. $\delta = 0$, Нецентральные кривые

2.1 Уравнение $\alpha y^2 + \beta x = 0, y^2 = -\frac{\beta}{\alpha}x$, И это **парабола**

2.1.1 $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$: Ветви параболы вправо

2.1.2 $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$: Ветви параболы влево

2.2 $\Delta = 0, \alpha y^2 = \gamma = 0, y^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

2.2.1 $\gamma \neq \alpha : y = \pm c$ - **две параллельных прямых**

2.2.2 $\gamma = 0 : y = 0$ - две "слипшихся" прямых - **1 прямая**

2.2.3 $\gamma = 0 : y = \emptyset$ - Пустое множество, **мнимая прямая**