Уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 & +\alpha a_1 + \beta b_1 \\ y = y_0 & +\alpha a_2 + \beta b_2 \\ z = z_0 & +\alpha a_2 + \beta b_3 \end{cases}$$
$Ax + By + Cz + D = 0$
Получим ФСР $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Прямая в пространстве

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, a - направляющий вектор
$\vec{r} - \vec{r} - 0 \parallel \vec{a} \implies [\vec{r} - \vec{r}_0 \times \vec{a}] = 0$
$.[\vec{r} \times \vec{a}] = \vec{b}, \vec{b} = [\vec{r}_0 \times \vec{a}]$ - уравнение плоскости в форме Плюккера
Если $\vec{b} \not\perp \vec{a}$ - не существует

Пример: есть перпердикуляр к прямой и направляющий вектор

$$\begin{cases} (\vec{r}_0 \cdot \vec{a}) = 0 \\ [\vec{r}_0 \times \vec{a}] = \vec{b} \end{cases}$$
$.[\vec{a} \times [\vec{r}_0 \times \vec{a}]] = [\vec{a} \times \vec{b}]$
$\vec{r_0} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{r_0}) = [\vec{a} \times \vec{b}]$
$\vec{r_0} = \frac{[\vec{a} \times \vec{b}]}{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$
$\vec{r} = \frac{[\vec{a} \times \vec{b}]}{(\vec{a} \cdot \vec{a})} + \vec{a}t$

Пример: пересечение прямой и плоскости

$\begin{matrix} l : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t \\ \alpha : (\vec{r} \cdot \vec{n}) = D \end{matrix} \implies \vec{r}_0 = (\vec{a}t \cdot \vec{n}) = D \implies (\vec{a} \cdot \vec{n})t = D - (\vec{r}_0 \cdot \vec{n}) \implies t = \frac{D - (\vec{r}_0 \cdot \vec{n})}{(\vec{a} \cdot \vec{n})}$
$r_* = \vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0 \cdot \vec{n})}{(\vec{a} \cdot \vec{n})}\vec{a}$
Если $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n}) = 0$
$r_* = \vec{r}_0 + \frac{((\vec{r_1} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n})}{(\vec{a} \cdot \vec{n})}\vec{a}$
случаи взаимного расположение прямой и плоскости:

1. Пересекаются (): $\implies (\vec{a} \cdot \vec{n}) \neq 0$
2. Прямая лежит в плоскости: $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0$ и $(\vec{r_0} \cdot \vec{n}) = D$
3. Прямая параллельна: $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0$, но $(\vec{r_0} \cdot \vec{n}) \neq D$

Пример: Проекция точки на плоскость

$M_0(\vec{r}_0), \alpha : (\vec{r} \cdot \vec{n}) = D$
Проведём$l : M_0 \in l, l \perp \alpha$
$\vec{a} = \vec{n} \implies \vec{r} = \vec{r_0} + \dfrac{D - (\vec{r_0} \cdot \vec{n})}{(\vec{n} \cdot \vec{n})} = [\vec{n}_e = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}] = \vec{r_0} + [P - (\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_e)]\vec{n}_e$, где $P = \frac{D}{(\vec{n} \cdot \vec{n})}$

Пример: проекция точки на прямую

$M_0(\vec{r}_0), l: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$
Проведём плоскость $\alpha: M \in \alpha, l \perp \alpha \implies \vec{n} = \vec{a} \implies \vec{r}_* = \vec{r}_1 + \frac{((\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\cdot\vec{a})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})}\vec{a}$
$|\vec{r}_* - \vec{r}_1| = |\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ cos $\varphi = [\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{r}_0 - \vec{r}_1), \vec{a}_e = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}] = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_1), \vec{a}_e)$

Пример: Расстояние между скрещивающимися

$\begin{matrix} l_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t \\ l_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t \end{matrix}$, Построим $\alpha: l_1 \in \alpha, l_2 \parallel \alpha \implies \vec{n} = [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]$
$\alpha: ((\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]) = 0$
Запишем в виде $(\vec{r} \cdot \vec{n}) = D$, где $D = (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}):$
$.[\vec{n}_e = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, P = \frac{D}{|\vec{n}|}]$
$(\vec{r} \cdot \vec{n}_e) = P \implies d(\vec{r}_2) = |(\vec{r} \cdot \vec{n}_e) - P|$, где d - расстояние от l_1 до α

Пример: В прошлой задаче, построим прямую, которая перпендикулярная двум скрещивающимся прямым

$\begin{matrix} l_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t \\ l_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t \\ l_3: l_1 \perp l_3, l_2 \perp l_3 \end{matrix} \implies \begin{cases} \vec{a} = [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] \\ \alpha: l_3, l_2 \in \alpha. \end{cases}, M_2 \in \alpha, \vec{n} = [\vec{a}_2 \times [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]] = [bac - cab] = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \implies$
$\implies \alpha: ((\vec{r} - \vec{r}_2) \cdot \vec{n}) = 0$
$M_0 = \alpha \cap l_1, \vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\vec{n})}{(\vec{a}\cdot\vec{n})}\vec{a}_1$
$l_3: \vec{r} = \vec{r}_1 + \dfrac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot [\vec{a}_2 \times [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]])}{(\vec{a} \cdot [\vec{a}_2 \times [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]])}\vec{a}_1 + [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]t$

Пример: пересечение 2 плоскостей

$\begin{cases} (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1) = D_1 \\ (\vec{r}_2 \cdot \vec{n}_2) = D_2 \end{cases}$
$\vec{a} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2]$
$.[\vec{r}_1 \times [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2]] = \vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_2) - \vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1) = \vec{n}_1 D_2 - \vec{n}_2 D_1 = \vec{b}$
$l: \vec{x} = \frac{[\vec{a}\times\vec{b}]}{(\vec{a}\cdot\vec{a})} + \vec{a}t$

Возможные взаимные расположение плоскостей:

1. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = l$: $[\vec{n_1} \times \vec{n_2}] \neq 0$
2. $\alpha_1 = \alpha_2$: $[\vec{n_1} \times \vec{n_2}] = 0$, $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2) \equiv (\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1)$
3. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$: $[\vec{n_1} \times \vec{n_2}] = 0$, $(\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2) \equiv (\vec{n}_2 \neq \lambda\vec{n}_1)$