# Взаимное расположение плоскостей

## Случай 2 плоскостей

$a_1^1x + a_2^1y \quad +a_3^1z = d_1$

$a_1^2x + a_2^2y \quad +a_3^2z = d_2$

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$AX = D, r = rk(A)_{[2\times 3]}, R = rk(AD)_{[2\times 4]}$

$1 \le r \le R \le 2: \left[\begin{array}{l} r = 1, R = 1 : A_1 = A_2 \\ r = 1, R = 2 : A_1 \parallel A_2 (A_1 \cap A_2 = \emptyset) \\ r = 2, R = 2 : A_1 \cap A_2 = (*) \end{array}\right.$

$(*)-$ в случае $(2,2)$ размерность $= n - r = 3 - 2 = 1$

Общее решение:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Из чего мы узнаём уравнение прямой

## Случай 3 плоскостей

$a_1^1x + a_2^1y \quad +a_3^1z = d_1$

$a_1^2x + a_2^2y \quad +a_3^2z = d_2$

$a_1^3x + a_2^3y \quad +a_3^3z = d_3$

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$AX = D, r = rk(A)_{[3\times 3]}, R = rk(AD)_{[2\times 4]}$

$1 \le r \le R \le 3,\ 0 \le |R - r| \le 1 : \left[\begin{array}{l} r = 1, R = 1 : A_1 = A_2 \\ r = 1, R = 2 : A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ r = 2, R = 2 : A_1 \cap A_2 = L \\ r = 2, R = 3 : A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ r = 3, R = 3 : A_1 \cap A_2 = \exists! P\{x; y; z\} = A^{-1}D \end{array}\right.$

## Случай $n$ плоскостей

$a_1^1x + a_2^1y \quad +a_3^1z = d_1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_1^nx + a_2^ny \quad +a_3^nz = d_n$

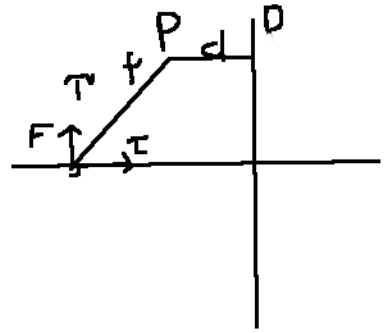
$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$1 \le r \le R \le n,\ 0 \le |R - r| \le 1 : \emptyset$

# Кривые второго порядка

Порядки:

1. $Ax + By + C = 0$ - прямая на плоскости
2. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$, один из $a_{nn} \neq 0$




Пусть заданы:

- точка $F$ - фокус
- прямая $D$ - директриса
- число $\varepsilon > 0$ - эксцентриситет

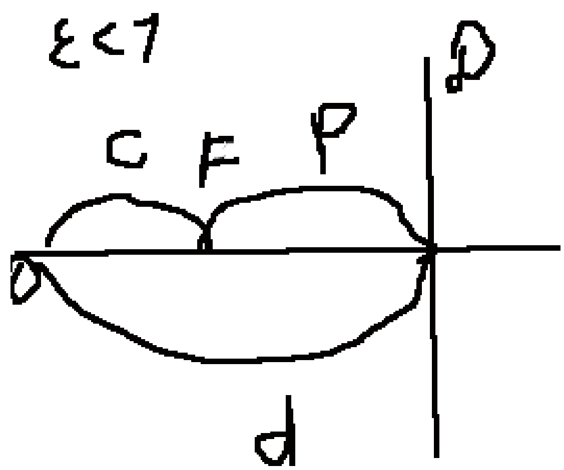
$f$ - расстояние до фокуса, $d$ - расстояние до директриссы
Запишем $\dfrac{f}{d} = \varepsilon$. Случаи $\varepsilon$:

- $\varepsilon < 1$: эллипс
- $\varepsilon = 1$: парабола
- $\varepsilon > 1$: гипербола

**Случай $\varepsilon < 1$ (эллипс)**

Вывод уравнения: $f = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \quad d = |P - \tilde{x}|$
$\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}}{|P - \tilde{x}|} \implies \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \varepsilon^2(P^2 - 2P\tilde{x} + \tilde{x}^2) \implies (1-\varepsilon^2)\tilde{x}^2 + 2P\varepsilon^2\tilde{x} + \tilde{y}^2 = \varepsilon^2P^2$
$(1-\varepsilon^2)\left(\tilde{x} + \dfrac{P\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \dfrac{p^2\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} + \tilde{y}^2 = \varepsilon^2P^2 \implies (1-\varepsilon^2)\left(\tilde{x} + \dfrac{P\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \tilde{y}^2 = \varepsilon^2P^2 + \dfrac{p^2\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} = \dfrac{p^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} =$
$\implies [y = \tilde{y}, x = \left(\tilde{x} + \dfrac{P\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)] \implies (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = \dfrac{P^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \implies$
$\implies \dfrac{x^2}{\frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{p^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} = 1 \quad (1)$

$$\frac{x^2}{\frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} = 1$$




Выражения для $\varepsilon, C$ через $a, b$
$\begin{bmatrix} a = \dfrac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \\ b = \dfrac{p\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{bmatrix} \implies \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$x = \tilde{x} + C, \quad C = \dfrac{P\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad d = \dfrac{P}{1-\varepsilon^2}$
$\begin{cases} \varepsilon^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \\ C = a\varepsilon \\ C^2 = a^2\varepsilon^2 = a^2 - b^2 \\ d = \dfrac{a}{\varepsilon} \end{cases}$
точка $a$ находится между $F$ и $D$.

Итак, каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

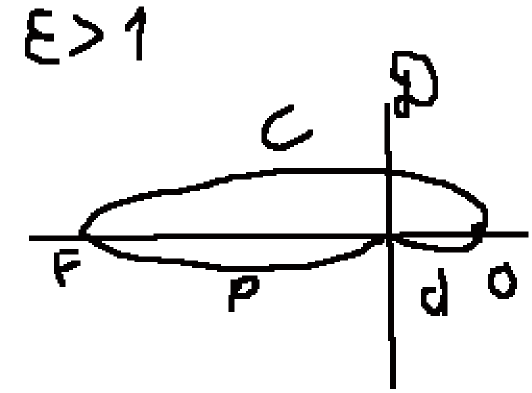
**Случай $\varepsilon > 1$ (гипербола)**

$$\begin{bmatrix} a = \dfrac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \\ b = \dfrac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \end{bmatrix} \implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x = \tilde{x} - C, \quad C = \dfrac{P\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$

Каноническое уравнение Гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$




Соотношения между переменными:

$d = \dfrac{P}{\varepsilon^2 - 1}$

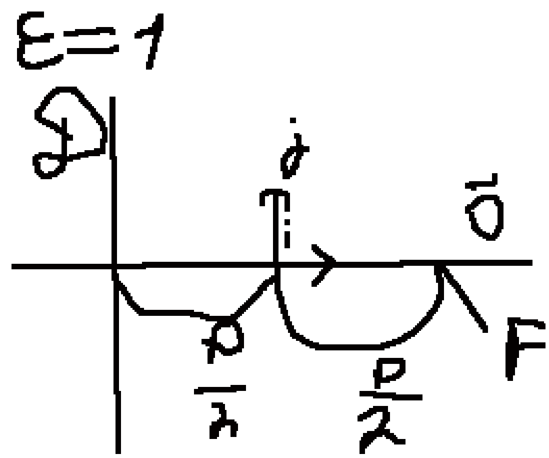
$$\begin{cases} \varepsilon^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} \\ C = a\varepsilon \\ C^2 = a^2\varepsilon^2 = a^2 + b^2 \\ d = \dfrac{a}{\varepsilon} \end{cases}$$

**Случай $\varepsilon = 1$ (парабола)**

Каноническое уравнение параболы:

$$2p\tilde{x} + \tilde{y}^2 = p^2$$
$$[\tilde{y}^2 = p^2 - 2p\tilde{x} = 2p(\frac{r}{2} - \tilde{x}) = 2px]$$
$$[x = \frac{p}{2} - \tilde{x}, y = -\tilde{y}]$$

$$y^2 = 2px \tag{3}$$




# Свойства

## эллипс

$F(x,y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$F(-x,-y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 : F(x,y)$ : центральная симметрия

$F(x,-y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 : F(x,y)$ : зеркальная симметрия относ. $ox$

$F(-x,y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 : F(x,y)$ : зеркальная симметрия относ. $oy$

Исследуем в $x, y > 0$:

$y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}, y' = -\dfrac{b}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} < 0$

УПС! Лекция закончилась)))) всем спасибо за вниамние! с вами был артур пирожков, до новых встреч!