ВОПРОСЫ К ПАНОВУ ПОСЛЕ ЛЕКЦИИ

- а как систему дифуров решать
- а как матрицу ковариаций считать

Производная n-ного порядка

$f(x_0)$ = [ряд тейлора] = ...

$f'(x_i), f''(x_i), \dots = ?$

Посчитаем левую производную:

$$f(x_{i-1}) = f_i - hf'_i + o(h)$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{o(h)}{h} = f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(1)$$

$$f'_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x_{i-1})}{h} \text{ (предел можно зачеркнуть)}$$

Посчитаем правую производную:

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + o(h) \implies f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(1)$$

Центральная производная:

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + hf'_i + o(h) \\ f_{i-1} = f_i - hf'_i + o(h) \end{cases}$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + o(1) \implies f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(1)$$

Но точность как по определению. попробуем разложить до 2 порядка..?

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + o(h^2) \\ f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + o(h^2) \end{cases}$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + o(h^2) \implies f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h)$$

Ура, метод центральных производных ассимптотически лучше определения!

а ещё можно вторую производную посчитать:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2f''_i + o(h^2) \implies f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + o(1)$$

Давайте продолжим разложение! дааа!!!

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + o(h^3) \\ f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{6}f'''_i + o(h^3) \end{cases}$$

Теперь на неоднородной сетке))))))

Сетка: $x_{i-1} \xrightarrow{2h} x_i \xrightarrow{h} x_{i+1}$

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + 2hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + o(h^2) \\ f_{i-1} = f_i - 2hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + o(h^2) \end{cases}$$

$$4f_{i+1} - f_{i-1} = 3f_i + 6hf'_i \implies f'_i = \frac{4f_{i+1} - f_{i-1} - 3f_i}{6h}$$

Погнали производную 3 порядка (но нам нужен 4-точечный шаблон)

$$f_{x+2} = f_i + 2hf'_i + \frac{1}{2}(2h)^2f''_i + \frac{1}{6}(2h)^3f'''_i + o(h^3) \implies f'''_i = \frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}}{h^3} + o(1)$$

Ну а у производной первого порядка с 3 точками там совсем уже не оно (зато $o(h^2)$)

Ошибка от $o()$ малого

- $o(1)$ - При уменьшении шага в n раз, точность увеличивается в n раз, макс. точность при $h = 10^{-8}$, макс. точность 10^{-7}
- $o(h)$ - При уменьшении шага в n раз, точность увеличивается в n^2 раз, макс. точность при $h = 10^{-5}$, макс. точность 10^{-11}
- $o(h^2)$ - При уменьшении шага в n , точность увеличивается в n^3 раз, макс. точность при $h = 10^{-4}$, макс. точность 10^{-12}

Численное решение задачи Коши (ДУ с начальными условиями)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t), & x(t=0) = x_0 \implies x(t) = ? \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t f(x, t) dx + C. \text{ Чтобы найти константу, подставляем } x(0):$$

$$x(0) = \int_0^0 f(x, y) dt + C \implies x(0) = C = x_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x, t) dt$$

Положим нашу задачу на сетку, как один раз Панин положил на стол собаку...

$(t_0 = 0, x_0); (t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ - попробуем рекуррентно получить t_{n+1} из t_n

Метод эйлера

Вычисляем интеграл методом правых либералов (левых прямоугольников)

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, t) dt$$

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n)$$

Для лукьяна

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t=a) = y_0$$

$$y(t) = \int_a^t f(y, t) dt + C, \quad C = y_0$$

$$y(t) = y_0 + \int_a^t f(y, t);$$

$$\text{Кладём на сетку: } y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

$$y_{n+1} = [\text{методом левых прямоугольников}] = y_n + (t_{n+1} - t_n) \cdot f(y_n, t_n) + o(t_{n+1} - t_n) =$$
$$= y_0 + h \cdot f(y_n, t_n) + o(h)$$

Для устойчивости:

$$y(t) = e^{-t}$$
$$h \leq \frac{2}{|y'(t_0)|} \implies \forall x \in [0, 5]: h \leq \frac{2}{e^{-t}} = 2e^{-t}$$

$$h \leq 2e^{-t}, e^{-t} \text{ монотонно убывает, поэтому } \begin{cases} h \leq 2e^{-0} \\ h \leq 2e^{-5} \end{cases} \implies h \leq 2$$

Разложение в ряд:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \text{ где } \xi - \text{ какое-то число в } [x_n, x_{n+1}]$$

$$\varepsilon[\text{ошибка}] = y(x_{n+1}) - (y_n + h \cdot f(x_n, t_n)) = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) - (y_n + h \cdot f(x_n, t_n)) = \frac{h^2}{2}f''(\xi_n)$$

$$\text{В худшем случае: } \varepsilon_n \leq \frac{h^2}{2} \sup_{[x_n, x_{n+1}]} y''(x).$$

$$\text{Накопленная ошибка: } \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \leq \frac{h^2}{2} \sum_i \sup_{[x_i, x_{i+1}]} y''(x) \leq \frac{h^2}{2} \frac{S}{h} \sup_{x \in [a, b]} y''(x) = \frac{Sh}{2} \sup_{x \in [a, b]} f''(x), S = b - a$$

Неявный метод

Вычисляем интеграл методом левых консерваторов (правых прямоугольников)

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_{n+1}, t_{n+1})$$

А вот нахуяяя... узнаем на следующей лекции))) [спойлер: неявный метод абсолютно устойчивый, в отличие от явного]

Следующая лекция

Неявная схема двойной точности?

Посчитаем интеграл методом трапеций $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(x_n, t_n) + f(x_{n+1}, t_{n+1}))$

Метод РК 2 порядка точности

Посчитаем интеграл методом центральных прямоугольников

на шкале $t : t_n, t_{n+1/2}, t_{n+1}$, расстояние $\frac{h}{2}$

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, t_n)$$

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} + \frac{h}{2} \cdot f(x_{n+1/2}, t_{n+1/2})$$

Имея $x_n, x_{n+1/2}, x_{n+1}$, считаем производную

Пример: $\frac{dx}{dt} = -x$ (аналитическое решение: $x(t) = e^{-t}$)

1. Методом Эйлера.

$$x_{n+1} = x_n - h \cdot x_n = x_n \cdot (1 - h)$$

2. Неявной схемой.

$$x_{n+1} = x_n - h \cdot x_{n+1}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + h}$$

3. Двойная точность.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \cdot (-x_n - x_{n+1}), \quad x_{n+1} = x_n \cdot \frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}}$$

А зачем нужна тогда неявная схема, если она обеспечивает одинаковую точность?

Вопрос устойчивости разностных схем

(при численных решениях обыкновенных ДУ)

$\tilde{x}_n(t)$ - точное x , $x_n(t)$ - полученное нами значение

Введём ошибку: $\varepsilon_n = x_n - \tilde{x}_n$

Важное определение: Схема называется устойчивой, если с увеличением n , если модуль ошибки не нарастает

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}, \quad |\lambda| \leq 1 \implies \text{Схема устойчива}$$

Выведем устойчивость для:

Схемы Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n) \implies \tilde{x}_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = \tilde{x}_n + \varepsilon_n + h \cdot f(\tilde{x}_n + \varepsilon_n, t_n) \quad (1)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + h \cdot f(\tilde{x}_n, t_n) + \bar{o}(h) \quad (2)$$

$$(1) - (2) : \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[f(\tilde{x}_n + \varepsilon_n, t_n) - f(\tilde{x}_n, t_n)] =$$

$$= [\text{Раскладываем по формуле Тейлора}] = \varepsilon_n + h \left[f(\tilde{x}_n, t_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\tilde{x}_n, t_n} \cdot \varepsilon_n - f(\tilde{x}_n, t_n) \right] =$$

$$= \varepsilon_n + h \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\tilde{x}_n, t_n} \implies \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n (1 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x})$$

$$|\lambda| \leq 1 \implies -1 \leq 1 + h \frac{\partial f}{\partial x} \leq 1 \implies -2 \leq h \frac{\partial f}{\partial x} \leq 0 \implies$$

$$h \leq \frac{-2}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{2}{|\frac{\partial f}{\partial x}|}$$

Иследуем на устойчивость пример их прошлой схемы:

$$\frac{dx}{dt} = -x, f(x, t) = -x, \frac{df}{dx} = -1 \implies h \leq 2$$

То есть, схема устойчива при $h \leq 2$

Неявная Схема

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_{n+1}, t_{n+1}), \quad \tilde{x}_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = \tilde{x}_n \varepsilon_n + h \cdot f(\tilde{x}_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, t_{n+1}) \quad (3)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + h \cdot f(\tilde{x}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (4)$$

(3) - (4) = [Аналогично прошлой секции],

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon_{n+1} \implies \varepsilon_{n+1} \left(1 - h \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \varepsilon_n$$

$$\lambda = \frac{1}{1 - h \frac{\partial f}{\partial x}}, \quad |\lambda| \leq 1 \implies$$

$$-1 \leq \frac{1}{1 - h \frac{\partial f}{\partial x}} \leq 1, \quad \begin{cases} 1 - h \frac{\partial f}{\partial x} \geq 1 \\ 1 - h \frac{\partial f}{\partial x} \leq -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} h \frac{\partial f}{\partial x} \leq 0 \\ h \frac{\partial f}{\partial x} \geq 2 \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$$

То есть обратная схема устойчива **При любых значениях шага**, так как шаг не фигурирует в условии устойчивости!