

Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пример: $K_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = [dv = dx, u = (x^2 + a^2)^{-n}, v = x, du = \frac{-n \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}] =$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \left(\frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{a^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right)$$

$$K_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nK_n - 2na^2 K_{n+1},$$

$$K_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)K_n \right), \quad K_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

интегрирование рациональных дробей

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad P, Q - \text{Многочлены}$$

представление правильной рациональной дроби в виде суммы элементарных дробей

1. $\frac{A}{x - x_1}$

2. $\frac{A}{(x - x_1)^\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$

3. $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, M, N, p, q \in \mathbb{R}, \frac{p^2}{4} - q < 0$

4. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\gamma}, \gamma \in \mathbb{N}$

Пример 1:

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{1}{x^4 + 4x^2 - 4 - 4x^2} = \frac{1}{(x^2)^2 - 4x^2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

Предположим, что $\exists A, B, C, D : \frac{1}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} \cdot \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$

Приведём правую часть к общему знаменателю

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{(Ax + B)(x^2 - 2x + 2) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2)}{x^4 + 4}$$

Это равенство должно выполняться $\forall x \in \mathbb{R}$, что возможно ! если равны числители, или когда коэффициенты при равных степенях x равны.

$$1 = x^3(A + C) + x^2(B - 2A + D + 2C) + x(2A - 2B + 2C + 2D) + (2B + 2D)$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B + 2C + D = 0 \\ 2A - 2B + 2C + 2D = 0 \\ +2B + 2D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{8} \\ D = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{x + 2}{8(x^2 + 2x + 2)} - \frac{x - 2}{8(x^2 - 2x + 2)}$$

Пример 2:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$$

Пусть $\exists!$ представление этой дроби в виде

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} \quad (*)$$

Т.к. a, b, c определяются единственно, то неважно, каким способом мы их получим. Домножим левую и правую часть (*) на $(x+1)$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)(x-3)} = A + \frac{B}{x+2}(x+1) + \frac{c}{x-3}(x+1).$$

Положим $x = -1$

$$A = \left. \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)(x-3)} \right|_{x=-1} = -\frac{1}{4}$$

Общая теорема о разложении правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей

1. (следствие основной теоремы алгебры)

знаменатель дроби $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $P_n(x), Q_m(x)$ - приведённые многочлены с вещественными коэффициентами

Всегда можно представить в виде $Q_m(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{\gamma_l}$,

$$\forall i \in \{1 \dots l\} : \frac{p_i}{4} - q_i + i < 0$$

$$\forall i \in \{1 \dots k\}, j \in \{1 \dots l\} \alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^l \gamma_j = m$$

2. Рациональная дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ единственным образом представляется в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{F_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k,1}}{x - x_k} + \frac{A_{k,2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_{1,2}x + N_{1,2}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1,\gamma_1}x + N_{1,\gamma_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1}} + \dots + \frac{M_{l,1}x + N_{l,1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{M_{l,2}x + N_{l,2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{M_{l,\gamma_l}x + N_{l,\gamma_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\gamma_l}}$$

И называется это Методом Неопределённых Коэффициентов - МНК

Замечание 1:

Метод из Примера 2 называется методом вычёркивания, и его можно применять только для поиска старших коэффициентов $A_{i,\alpha_i}, i \in \{1 \dots k\}$ дробей, у которых в знаменателе наибольшая степень многочлена $(x - x_i)^{\alpha_i}$.

В этом случае вычёркивается как раз он. В частности, для дробей вида $P_n(x) \frac{1}{(x-1) \dots (x-m)}$, методом вычёркивания можно получить полное разложение

Замечание 2:

Если $R_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - неправильная дробь ($n > m$), то нужно сначала выделить целую часть (делением с остатком, например)

Интегрирование правильной рациональной дроби

Сводится к интегрированию элементарных дробей

$$1. \int \frac{dx}{x - x_1} = \ln |x - x_1| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{(x - x_1)^\alpha} = \frac{(x - x_1)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} + C$$

$$3. \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}) + N}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} = M \int \frac{tdt}{t^2 + B^2} + A \int \frac{dt}{t^2 + B^2}$$

$$= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{pM}{2}}{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + C$$

$$4. \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{Mt + A}{(t^2 + B^2)^n} dt = M \int \frac{tdt}{(t^2 + B^2)^n} + A \int \frac{dt}{(t^2 + B^2)^n} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2)}{(t^2 + B^2)^n} + AK_n =$$

$$= \frac{M}{2} \frac{1}{n+1} \cdot (x^2 + px + q)^{-n+1} + A \cdot K_n + c$$

Пример 1:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 4} = \frac{1}{8} \int \frac{(x+2)dx}{(x+1)^2 + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{(x-2)dx}{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{8} \int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2 + 1} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{(x-1)dx}{(x-1)^2 + 1} +$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{16} \ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{16} \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(x-1) =$$

$$= \frac{1}{16} \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)}{8}$$

Глава VII. Определённый интеграл.

\$1 - основные понятия

В этой главе говорим только об ограниченных функциях!

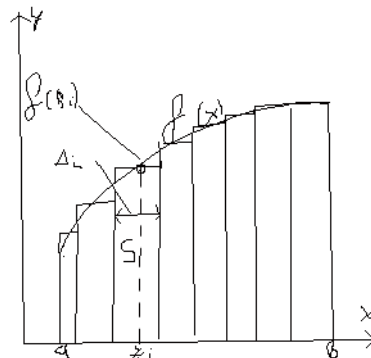
Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частей.

Набор точек $\{x_i\}$ называется *разбиением отрезка* $[a, b]$ и обозначается $T_{[a,b]}(x_i)$.

Обозначим $\Delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$. $\Delta = \sup\{\Delta_i\}$ — диаметр разбиения.

На каждом отрезке $\Xi = [x_{i-1}, x_i]$ выберем точку $\xi_i \in \Xi$

Составим суммы $I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$ — площадь ступенчатой фигуры.



Определение:

Число I называется пределом интегральных сумм $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T_{[a,b]}(x_i), \forall \{\xi_i\}, \Delta < \delta : |I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$

Определение:

Функция $f(x)$ называется интегрируемой [в смысле определённого интеграла Римана] на отрезке $[a, b]$, если для нее $\exists \lim I_i$. Обозначается $I = \int_a^b f(x) dx$

Пример интегрируемой функции: $f(x) = \text{const}, x \in [a, b]$

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = c \sum_{i=1}^n \Delta_i = c(b - a)$$

$$\forall T_{[a,b]}(x_i), \forall \{\xi_i\} I(x_i, \xi_i) = c(b - a) \implies \lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = c(b - a) = I \implies f(x) - \text{интегрируемая } \forall a, b$$

Пример неинтегрируемой функции: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$1. \xi_i \in \mathbb{Q}, i = \{1 \dots n\} : I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta_i = b - a$$

$$2. \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, i = \{1 \dots n\} : \sum_{i=0}^n 0 \cdot \Delta_i = 0$$

Можно выбрать набор ξ_i такой, что $I(x_i, \xi_i) \in \forall [0, b - a] \implies \nexists \lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i)$

Сумма Дарбу

Т.к. $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то она ограничена и на $\forall [x_{i-1}, x_i] \implies \implies \exists m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \exists M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Замечание: не обязательно $\exists \bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i : f(\bar{\xi}_i) = m_i, f(\bar{\xi}_i) = M_i$, но они существуют для каждой непрерывной функции (по 2 теореме Вейштрасса)

Составим сумму $\bar{s} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$ - Это называется нижней суммой Дарбу (на рисунке все "полоски" *под* графиком)

Составим сумму $\underline{s} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i$ - Это называется верхней суммой Дарбу (на рисунке все "полоски" *над* графиком)

СВОЙства сумм дарбу

Свойство I:

$$1. \bar{s} = \inf_{\xi_i} I(x_i, \xi_i)$$

$$2. \underline{s} = \sup_{\xi_i} I(x_i, \xi_i)$$

Доказательство:

$$m_i < f(\xi_i) < M_i, \quad m_i \Delta_i < f(\xi_i) \Delta_i < M_i \Delta_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i < \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i, \quad \bar{s} < I(x_i, \xi_i) < \underline{s}$$

Получаем, что $\bar{s}$ - нижняя, а $\underline{s}$ - верхняя грани интегральных сумм

Докажем, что грани точные:

На отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \xi'_i : m_i < f(\xi'_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{(b-a)\Delta_i}$$

$$I(x_i, \xi'_i) - \bar{s} = \sum_{i=1}^n (f(\xi'_i) - m_i) \Delta_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot \Delta_i} = \varepsilon$$

получили, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi'_i : \bar{s} \leq I(x_i, \xi'_i) < \bar{s} + \varepsilon \implies \bar{s} = \inf_{\{\xi_i\}} I(x_i, \xi_i)$

Аналогично доказывается, что $\underline{s} = \sup_{\xi_i} I(x_i, \xi_i)$

Определение:

Разбиение, полученное из $T_{[a,b]}(x_i)$ путём добавления некоторых точек x'_i называется измельчением разбиения

Свойство II:

Пусть $\bar{s}, \underline{s}$ - нижние и верхние суммы Дарбу разбиения $T_{[a,b]}(x_i)$, а $\bar{s}', \underline{s}'$ - суммы Дарбу измельчения $T_{[a,b]}(x_i, x'_i)$. Тогда

$$1. \bar{s}' \geq \bar{s}$$

$$2. \underline{s}' \leq \underline{s}$$

Доказательство:

Добавим к $T_{[a,b]}(x_i)$ одну точку x'_k

$$\begin{aligned} \bar{s}' - \bar{s} &= m_k(x'_k - x_{k-1}) + m'_k(x_k - x'_k) - m_k(x_k - x_{k-1}) \geq \\ &\geq m_k(x'_k - x_{k-1} + x_k - x'_k - x_k + x_{k-1}) = 0 \implies \bar{s}' \geq \bar{s} \end{aligned}$$

