Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции в терминах верхних и нижних сумм

Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0 \exists T_{[a,b]} : \underline{S} - \bar{s} < \varepsilon$

Следствие из теоремы Кантора:
Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\forall\varepsilon > 0 \exists T_{[a,b]} : \omega_i < \varepsilon, \forall i \quad \omega_i = \underline{M}_i - \bar{m}_i$

Интегрируемость разрывных ограниченныъ функций, все точки разрывов которых можно покрыть отрезками сколь угодно малой длины [назовём такое функциями с **б.м. шириной разрыва**, пример такой функции sgn sin $\frac{1}{x}$]:

В отрезке $[-\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{8}] \exists\infty$ точек разрыва, вне - конечное число разрывов.
Внутри: $\frac{1}{\pi k} < \frac{\varepsilon}{8}, \quad k > \frac{8}{\pi\varepsilon}$
Снаружи: $2 < k < \frac{8}{\pi\varepsilon}$

Каждую точку снаружи покроем отрезком $[\pm\frac{1}{\pi k} - \frac{\varepsilon}{16}, \pm\frac{1}{\pi k} + \frac{\varepsilon}{16}]$, внутри покроем $[-\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{8}]$

Суммарная длина отрезков, покрывающий точки разрыва $\bar{\Delta} = \frac{\varepsilon}{4} + 2n \cdot \frac{\varepsilon}{8n} = \frac{\varepsilon}{2}$

Составим разбиение $T_{[-\pi,\pi]}$, которое будет включать все концы отрезков, покрывающих точки разрыва

Вне точек разрыва $f(x)$ непрерывна. По следствию из Теоремы Кантора можно подобрать такое разбиение, что $\forall i \omega_i < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$, в нашем случае на непрерывностях $\omega_i = 0$

$\underline{S} - \bar{s} = \sum_i \omega_i\Delta_i + \sum_i 0 \cdot \Delta_i = [\omega_i = 2] = 2\sum_i \Delta_i = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Теорема: Ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ с б.м. шириной разрыва интегрируема на $[a, b]$

Доказательство: выберем произвольное $\varepsilon > 0$, покроем все точки разрыва суммарной длиной $\bar{\Delta} < \frac{\varepsilon}{2(\underline{M} - \bar{m})}$, где $\underline{M} = \sup\limits_{[a,b]} f(x), \bar{m} = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$
На оставшихся отрезках $f(x)$ непрерывна, поэтому по следствию из теоремы Кантора для выбранного $\varepsilon \exists T_{[x_{i-1},x_i]} \in [a, b] : \omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\underline{S} - \bar{s} = \sum_i \bar{\omega}_i\bar{\Delta}_i + \sum_i \omega_i\Delta_i < (\underline{M} < \bar{m})\sum_i \Delta_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i \Delta_i \leq \varepsilon)$
По теореме о необходимом и достаточном условии интегрируемости в теоминах верхних и нижних сумм $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

$6. Свойства интегрируемых функций

для всех свойств $f(x)$[и $g(x)$] интегрируема(-ы) на $[a, b]$

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (по определению)

2. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

   Доказательство: $\sum_i(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\Delta_i = \alpha\sum_i f(i)(\xi_i)\Delta_i + \beta\sum_i g(\xi_i)\Delta_i$

3. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема $\forall[c, b] \subset [a, b]$

Доказательство: $\forall\varepsilon > 0 \exists T_{[a,b]} : \underline{S}^{[a,b]} - \bar{s}^{[a,b]} < \varepsilon$.
$$\underline{S}^{[c,d]} - \bar{s}^{[c,d]} = \sum_{[x_{i-1},x_i]\in[a,b]} \omega_i^{[c,d]} \cdot \Delta_i \le \sum_{[x_{i-1},x_i]\in[a,b]} \omega_i^{[a,b]}\Delta_i = S^{[a,b]} - \bar{s}^{[a,b]} < \varepsilon$$

4. Если $c \in [a,b]$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

   Доказательство: $\forall\varepsilon > 0 \exists T_{[a,b]} : \underline{S} - \bar{s} < \varepsilon$. Добавим [если нужно] точку c в T:
   $\underline{S}^{(c)} - \bar{s}^{(c)} \le \underline{S} - \bar{s} < \varepsilon$, $\displaystyle\sum_{\cup[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{\cup[x_{i-1},x_i]\subset[a,c]} f(\xi_i)\Delta_i + \sum_{\cup[x_{i-1},x_i]\subset[c,b]} f(\xi_i)\Delta_i$
   Каждое слагаемое стремится к соответствующему интегралу, то есть типа доказано

   4'. Если $c \notin [a,b]$, то равенство 4 всё ещё выполняется

5. Если $f(x) \ge 0 \forall x \in [a,b] :\quad \displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge 0$

   Доказательство: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta_i \ge 0$

   Следствие: $f(x) \ge g(x) \forall x \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. $|f(x)|$ интегрируем на $[a,b]$,

   Доказательство: $-f(x) \le |f(x)| \le f(x) \implies -\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \implies$
   $\implies \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \ge \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ (Для $f(x) \ge 0$, аналогично для $f(x) \le 0$)

7. $f(x)g(x)$ интегрируемо на $[a,b]$

   Разбор в записи лекции

8. $\sup\limits_{[a,b]} g(x) < 0 \vee \inf\limits_{[a,b]} g(x) > 0 : \dfrac{f(x)}{g(x)}$ интегрируемы на $[a,b]$

$7. Теорема о средних

$$g(x) \ge 0 \vee g(x) \le 0\ \forall x \in [a,b] : \exists\mu \in [\bar{m}_f, \underline{M}_f] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

Доказательство: (для $g(x) \ge 0$)
$\bar{m}_f \le f(x) \le \underline{M}_f \quad | \cdot g(x)$
$\bar{m}_f g(x) \le f(x)g(x) \le \underline{M}_f g(x)$
$\bar{m}_f \displaystyle\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \underline{M}_f \int_a^b g(x)dx$
Если $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \ne 0$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и $\forall\mu$ утверждение верно
Если $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$, $\bar{m}_f \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le \underline{M}_f \implies \bar{m}_f \le \mu \le \underline{M}_f$ (ну и понятно, что там всё доказано)

Следствие: Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\forall\mu \in [\bar{m}_f, \underline{M}_f]\ \exists\xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu$

Для непрерывной $f(x)$ формула среднего значения: $\exists\xi \in [a,b] : \quad \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

Задание на перерыв: 1. Сформулировать теорему о среданем значении для $g = 1$ для $f(x)$ ограниченной и неограниченной на $[a, b]$
2. Придумать $f(x)$ такую, чтобы $f(x)$ неинтегрируема, а $|f(x)|$ интегрируема.

\$8. Формула Ньютона-Лейбница

Напоминалка: $F(x)$ называется первообразной $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $F'(x_0) = f(x_0) \forall x_0 \in [a, b]$

Основная Теорема: Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Доказательство: $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi) \int_x^{x+\Delta x} dt}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$

Следствие: **формула ньютона-лейбница**

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и одна из её первообазных: $\phi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

$$\phi(x) = F(x) + C, \quad \phi(x) = \int_a^x f(x)dx + C \quad \begin{cases} \phi(a) = C \\ \phi(b) = \int_a^b f(x)dx \end{cases} \implies \int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

■

Следствия следствия:

1. Интегрирование по частям:
   $\int udv = uv - \int vdu.$
   $\int_a^b udv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu$

2. Замена под знаком определённого интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет ПО $F(x)$, $g(t)$ дифференцируема, $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$
   Тогда $\int_a^b f(x)dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$
   Доказательство:
   $F'(x) = f(x), \quad F'(g(t)) = f(g(t)) \cdot g'(t)dt \implies F'(g(t))-$ первообразная для правой части. По формуле Н.-Л.: $\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - f(a) = \int_a^b f(x)dx$
   Пример: $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = [x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], dx = g'(t)dt = a \cos tdt] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 tdt =$
   $a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^2$

3. Дифференцирование интеграла с переменными пределами
   Пусть $\phi(x), \psi(x)$ дифф-мы на $[a, b]$, а $f(t)$ интегрируема на $t = [\phi(x), \psi(x)]\ \forall x \in [a, b]$
   Тогда можно составить интеграл $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F(\psi(x)) - F(\phi(x)), F$ - ПО $f(t) \implies$
   $\implies \frac{d}{dx} \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dta = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$

Пример: $\frac{d}{dx}\int_{1-x}^{x} f(t)dt = f(x) + f(1-x)$

Для самостоятельного изучения остаётся тема "СВОйства графиков функций": первое, второе достаточно условие экстремума, определение точек возможного экстремума, выпуслость/вогнутость, точки перегиба, достаточное условие перегиба, ассимптоты

Глава VIII: Теорема о формуле Теееееееееееееееееееееееейлора

Определение: Многочлен Тейлора для $f(x)$ в точке x_0 : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Теорема о формуле тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Если $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $\Omega(x_0) \implies \forall x \in \Omega(x_0)$ верно представление

$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$, где $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

Доказательство: $\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$ $\qquad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) =$

$f(x_0) - f'(t)(x-t)|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} =$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x)$

Через n итераций $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

Формула тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}, \xi \in [x_0, x]$

$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$ [по теореме о среднем] $= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt =$
$= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$

Теорема о формуле тейлора с остаточным членом в форме Пеано Пусть $f(x)$ n раз дифференцируе в x_0. Тогда справебыдло: $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$

Доказательство: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$ $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0')(x-x_0) - \dots}{(x-x_0)^n} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$, значит, $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$

Пусть $\alpha(x) = f(x) - P_n(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha'(x) = 0,$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \alpha^{(n)}(x) = 0$ $\begin{cases} \alpha(x_0) = 0 \\ \alpha'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$

Теорема о единственности представления по формуле тейлора

Пусть у нас есть 2 представления:

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + \alpha_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + \alpha_2(x)$

$x = x_0 \implies a_0 = b_0, \quad a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + \alpha_1(x) = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + \alpha_2(x)$

равенство производных должно выполняться $\forall x$

$a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + \alpha_1'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + \cdots + \alpha_2'(x)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\cdots \implies a_i = b_i \forall i$