$1. Теорема о непрервыности функции

Пусть $f(x)$ определена на множестве X, x_0 - предельная точка X

Определение: Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет условию коши в точке, если
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X \begin{cases} 0 < |x' - x_0| & < \delta \\ 0 < |x'' - x_0| & < \delta \end{cases} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Теорема: для того, чтобы $f(x_0)$ была непрервыной, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши в x_0

Необходимость, достаточность: сформулированы в прошлой лекции

Док-во достаточности

Дано: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X \begin{cases} 0 < |x' - x_0| & < \delta \\ 0 < |x'' - x_0| & < \delta \end{cases} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
x_0 - предельная точка $X \implies \exists \{x_n\} \to x_0, x_n \neq x_0, x_n \in X$
Заметим, что
$\forall \delta > 0 \exists N \in N, \forall n > N : |x_n - x_0| < \delta, \forall m > N : |x_m - x_0| < \delta$
По условию из дано $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \implies \{f(x_n)\}$ - фундаментальная
!!!Итого: если $\{x_n\} \to x_0$, то $\{f(x_n)\}$ - фундаментальная
Докажем, что $\forall \{x'_n\} \to x_0 (x'_n \neq x_0, x'_n \in X) \{f(x'_n)\} \to a$
Возьмём $\{x_n\} \to x_0$, для которого уже доказали, что $\{f(x_n)\} \to a$
Возьмём $\forall \{x_n\} \to x_0 (x'_n \neq x_0, x'_n \in X)$
!!!Составим последовательность $\{x''_n\} = \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3 \dots\} \to x_0$
Если $\{x''_n\} \to x_0$, то $\{f(x''_n)\}$ фундаментальная $\implies$ $\{f(x''_n)\}$ - сходится, т.е. все её подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу
$\{f(x'_n)\} \to a$
$\{f(x''_n)\} \to a$ Получаем определение по гейне, тогда доказано

$2. Теорема Вейштрасса

Определение: функция $f(x)$ называется непрервыной на множестве X, если она непрерывна $\forall x_0 \in X$

Первая теорема Вейштрасса:
Если функция непрервына на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте
Замечание: если $x \in [a, b]$, то речь идёт о непрервыности в точке $x = a$ слева и справа

Доказательство

Дано: $f(x)$ непрервына $\forall c \in [a, b]$, то есть
$\forall \{x_n\} \in [a, b], \{x_n\} \to c : \{f(x_n)\} \to f(c)$
Предположим, что $f(x)$ неограничена на $[a, b]$, то есть
$\forall M \exists c \in [a, b] : |f(c)| > M$
Отсюда следует, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$
Составим последовательность $\{x_n\} \in [a, b] \implies \forall n : a \leq x_n \leq b \implies \{x_n\}$ - сходящаяся
По теореме Гольцано Вейштрасса из $\{x_n\}$ Можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$
Пусть $\{x_{n_k}\} \to c \in [a, b]$, так как $a \leq x_{n_k} \leq b$
По предположению непрервыности $|f(x_{n_k})| > n_k \geq n$
По условию $f(x)$ непрервына на $[a, b] \implies$ если $\{x_{n_k}\} \to c$, то $\{f(x_{n_k})\} \to f(c)$
но $f(x_{n_k})$ - бесконечно большая, что образовывает противоречие

2 Теорема Вейштрасса:
Непрерывная на сегменте функция достигает своих точной верхней и точной нижней граней.
Т.е. $\forall [a,b] \exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \inf f_{[a,b]}, f(x_2) = \sup f_{[a,b]}$

Точная грань: чисто M называется точной верхней гранью $f(x) \in X$ если

1. $\forall x \in X f(x) \leq M$

2. $\forall A < M \exists x \in X : f(x) > A$

Пример: $f(x) = e^{-x^2}$. $\sup f(x) = 1 = f(0), \inf f(x) = 0, \nexists x : f(x) = 0$
На любом сегменте $x = [a,b]$: $f(x)$ достигает $\inf f = e^{-a^2}, \sup f = e^{-b^2}$

Доказательство

Дано:

Предположим, что $f(x)$ не достигает точной верхней грани, то есть $\forall x \in [a,b] : f(x) < M$
Можно определить $F(X), x \in [a,b] = \frac{1}{M - f(x)}, F(X) > 0$
$F(X)$ непрерывна, тогда по 1 теореме Вейштрасса $F(x)$ ограничена и сверху, и снизу на $[a,b]$
$\exists A, \forall x \in [a,b] : 0 < f(x) \leq A \implies 0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq A \implies M < f(x) \geq \frac{1}{A} \implies f(x) \leq M - \frac{1}{A}$
Что противоречит тому, что $M = \sup f$, значит предположение $f(x) < M \forall x \in [a,b]$ неверно, поэтому
$\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \inf f_{[a,b]}, f(x_2) = \sup f_{[a,b]}$

$3. Равномерная непрерывность функции

Определение:
$f(x)$ называется равномерно непрервыной на $\mathbb{X}$, если
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in \mathbb{X}, 0 < |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Пример 1: $f(x) = x$
Пример 2: $f(x) = \frac{1}{x}$ докажем, что не не равномерно непрерывная: сформулируем отрицание
$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > o, \exists x', x'' \in [a,b], 0 < |x' - x''| < \delta : |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| \varepsilon$
$\exists n \in \mathbb{N}, \delta > \frac{1}{n}$
Положим $\varepsilon = 1$, $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{n+2}$
$|x' - x''| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} = \delta$
$|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = 2 > \varepsilon$
Пример 3:
$\tan x : x \notin \mathbb{R}$ НЕ МОЖЕТ быть исследована на равномерность непрерывности
Для исследования на равномерность непрерывности: $x \in \mathbb{R}, f$ - непрерывная на $\mathbb{R}$!

Теорема Кантора

Функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$ равномерно непрерывна на этом сегменте
Доказательство: [будем доказывать от противного]
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, т.е.
$\forall c \in [a,b], \forall \{x_n\} \to c, \{x_n\} \in [a,b] : \{f(x_n)\} \to f(c)$
предположим, что

1. $f(x)$ не является равномерно непрервыной, т.е.
   $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in [a,b], 0 < |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| > \varepsilon$

2. Раз $\exists$ такое ε, что выполняется $\forall \delta$, то значит, выполняется и для $\delta_n = \frac{1}{n}, b \in \mathbb{N}$
   $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta_n > 0, \exists x'_n, x''_n \in [a,b], 0 < |x'_n - x''_n| < \delta : |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$

Образуем последовательности $\{x'_n\}, \{x''_n\}. a \leq x'_n, x''_n < b \implies$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Выделим подпоследовательность $\{x'_{nk}\} \to c \in [a,b]$, $a \leq x'_{nk} \leq b \implies a \leq c \leq b$ (по теореме о предельном переходе в неравенство) Из $[2]$: $\forall n \exists x'_{nk}, x''_{nk}, 0 < |x'_{nk} - x''_{nk}| < \delta_{nk} = \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n_k}$ (3)
Для каждого $x'_{nk} \in \{x'_{kn}\} \exists x''_{nk}$, уд. $[3]$. x''_{nk} образуют подпоследовательность $\{x''_n\}$. Докажем, что $\{x''_n\} \to c$
$|x''_{nk} - c| \leq |x''_{nk} - x'_{nk}| + |x'_{nk} - c|$.
$|x''_{nk} - x'_{nk}| \to 0$ (3), $|x''_{nk} - x'_{nk}| \to 0$ ($\{x''_{nk} \to c\}$)
Итак, $\{x'_{nk}\} \to c, \{x'''_{nk}\} \to c \implies$ из (1) (функция непрерывна на $[a,b]$) $\{f(x'_{nk})\} \to f(c), \{f(x''_{nk})\} \to f(c)$
Но это противоречит (2) : $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon(\forall \delta_{nk} = \frac{1}{n}$, т.е. $\forall n_n)$
Это показывает, что предположение о равномерной непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ неверно.

\$4 Теоремы о дифференцируемых функциях

Определение: говорят, что функция $f(x)$ возрастает в точке c, если $\exists \Omega(c) : \begin{cases} f(x) > f(c)(x > c) \\ f(x) < f(c)(x < c) \end{cases}$ (4)

Определение: говорят, что функция $f(x)$ убывает в точке c, если $\exists \Omega(c) : \begin{cases} f(x) < f(c)(x > c) \\ f(x) > f(c)(x < c) \end{cases}$ (4')

Теорема (достаточное условие возрастания $f(x)$ в c)

Пусть c - предельная точка промежутка, на котором определена $f(c)$
Если $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке c (выполнено 4)

Доказательство:
Дано: $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$
Обозначим $x = c + \Delta x$
Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega(c), 0 < |x - c| < \delta : \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon \implies -\varepsilon + f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \varepsilon + f'(c)$
т.к. это верно $\forall \varepsilon > 0$, то верно и для $\varepsilon = f'(c) > 0$
$0 < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \iff \begin{cases} f(x) > f(c)(x > c) \\ f(x) < f(c)(x < c) \end{cases}$
Но условие f'(c) - только достаточное условие

Теорема (необходимое условие неубывания $f(x)$ в точке)

Если $f(x)$ неубывает и дифференцируема в точке c, то $f'(c) \geq 0$
Доказательство:
Дано: $\exists \Omega(c), \forall x \in \Omega(c) \begin{cases} f(x) \geq f(c)(x > c) \\ f(x) \leq f(c)(x < c) \end{cases}$, $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(c)-f(x)}{x-c} = f'(c) \geq 0$ (по теореме о предельном переходе в неравенство)
Доказано ;)

Локальный экстремум

Определение: говорят, что точка c является точкой локального экстремума функции $f(x)$, если
$\exists\Omega(c), \forall x \in \Omega(c) \left[\begin{array}{l} f(x) > f(c)(\text{min}) \\ f(x) > f(c)(\text{max}) \end{array}\right.$

Теорема (Ферма, необходимое условие локального экстремума)

Если f(x) дифференцируемая в точке c, то $f(c)$ = 0

Доказательство: [от противного]

Пусть c - точка локального максимума. ($\exists\Omega_1(c) \subset \Omega(c), \forall x \in \Omega(c) : f(x) < f(c)$)
Предположим, что $f'(c) > 0$ [достаточное условие о возрастании]. Тогда $f(c)$ возрастает в $c \implies$
$\implies \exists\Omega(c) : \begin{cases} f(c) < f(x)(x < c)[1] \\ f(c) > f(x)(x < c)[2] \end{cases}$, где $[1]$ противоречит Дано.
Аналогично доказывается для минимума

Теорема (Роля)

Пусть $f(x)$

1. определена и непрерывна на $[a, b]$
2. дифференцируема на (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство:

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ точной верхней и точной нижней граней (2 теорема Вейштрасса)
$\exists c : f(c) = m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

$\exists c' : f(c') = M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Рассмотрим 3 случая:

1. $\inf_{[a,b]} = \sup_{[a,b]} \implies f(x) = const, \forall c \in (a, b) f'(c) = 0$
2. $M = \sup_{[a,b]} > f(a) = f(b), \forall x \in [a, b] f(x) \leq M = c$, тогда c - точка локального максимума
3. $m = \inf_{[a,b]} < f(a) = f(b), \forall x \in [a, b] f(x) \geq m = c'$, тогда c' - точка локального максимума