

Теорема (Роля)

Пусть $f(x)$

1. определена и непрерывна на $[a, b]$
2. дифференцируема на (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство: см. [19,23.11.pdf]

Теорема Лагранжа

Введение: $y_{touch} = f'(c)(x - c) + f(c)$

$$y_{intersect} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Сама теорема:

Пусть $f(x)$

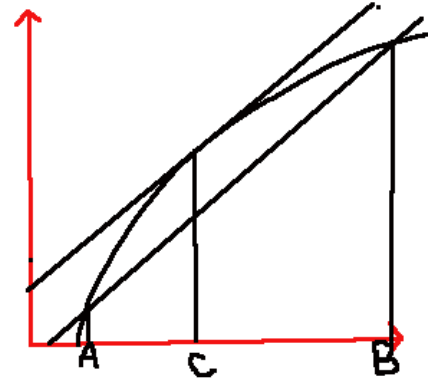
1. Непрерывна на $[a, b]$
2. Дифференцируема на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство:

рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - y_{intersect} = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$

1. $F(x)$ непрерывная на $[a, b]$ как суперпозиция непрерывных функций
2. $F(x)$ дифференцируема на (a, b) как суперпозиция дифференцируемых функций
3. $F(a) = 0$
4. $F(b) = 0$



Для $F(x)$ выполнены условия Теоремы роля, значит

$$\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0, 0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) [c \in (a, b)].$$

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) [c \in (a, b)]$ - Формула Лагранжа, Формула конечных приращений

Замечание:

Часто используется в форме $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x, [0 < \theta < 1]$

Следствие:

Если $f'(x) \equiv 0 \forall x \in [a, b]$, то $f(x) = const, x \in (a, b)$

Доказательство:

$\forall x_0 \in [a, b], x \in (a, b)$. На отрезке $[x_0, x]$ по формуле Лагранжа получаем

$$f(x) - f(x_0) = 0 + (x - x_0) \implies \forall x, x_0 \in [a, b] : f(x) = f(x_0) \implies f(x) = const$$

Теорема о формуле Коши

1. Пусть $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a, b]$
2. Пусть $f(x), g(x)$ дифференцируемы на (a, b)
3. $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ Замечание: $g(b) \neq g(a)$, иначе бы выполнялось условие теоремы ролля,

Доказательство:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$F(x)$ непрерывна, дифференцируема на (a, b) . $F(a) = f(a), F(b) = f(b)$

По теореме ролля $\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0 \implies 0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) \implies$

$$\implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Замечание 1: Точка c в формуле Лагранжа для функций $f(x), g(x)$ не совпадают и не совпадают с точкой c в формуле Коши

Замечание 2: Формула Лагранжа получается из Формулы Коши, если $g = x$

Правило Лопиталю

Теорема:

1. Пусть $f(x), g(x)$ дифференцируемы в проколотой $\Omega(x_0)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
4. $\forall x \in \Omega(x_0) : g'(x) \neq 0$
5. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Если $f(x), g(x)$ не опред в x_0 , доопределим по непрерывности $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Возьмём $x \in \Omega(x_0)$. Для отрезка $[x, x_0]$ и функций $f(x), g(x)$ выполняется формула Коши

Т.е. $\exists c \in (x, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Если $x \rightarrow x_0, x < c < x_0$, то $c \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{c \rightarrow x_0} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0}$. Получается, что

$$\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Если $\exists \lim$ левой части равенство, то $\exists \lim$ правой части равенства и они равны

Замечание 1: Теорема о правиле Лопиталю работает при $f(x_0) \rightarrow \infty \wedge g(x_0) \rightarrow \infty$ (через замену $f_1 = f^{-1}$)

Замечание 2: Теорема о правиле Лопиталю работает при $x \rightarrow \infty$ (через замену $x_1 = x^{-1}$)

Замечание 3: Если после использования правила Лопиталю неопределённость не ушла, применяем снова

Итак, правило работает для неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \rightarrow x_0 \vee x \rightarrow \infty$

Пример 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = [\alpha > 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \text{ Вывод: } \ln(x) \ll x^\alpha, \alpha > 0 \text{ [или } \ln(x) = o(x^\alpha)]$$

Пример 2:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}}. \text{ О нет, стало ещё хуже... пойдём другим путём.}$$

$$\text{Попробуем перевернуть } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-\alpha}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\alpha x^{-\alpha-1}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\alpha x^{2-\alpha}}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2(\alpha-2)x^{4-\alpha}}{-4e^{\frac{1}{x^2}}} = \dots =$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2(\alpha-2)(\alpha-4) \dots (2(n-1)-\alpha)x^{2n-\alpha}}{(-2)^n e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Глава V. Интегралы

Неопределённый интеграл

$v = \omega r, \dot{x}(t) = v(t) - \omega r, x(t)$ - пробег.

Для того, чтобы получить $x(t)$, нужно провести действие, обратное дифференцированию.

Определение:

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $\mathbb{X}$, если $\forall x \in \mathbb{X} : F'(x) = f(x)$

Замечание: $F(x)$ дифференцируема $\implies F(X)$ - непрерывна

Пример 1:

$$F(x) = \ln(x), x > 0 \implies F'(x) = x^{-1}, x > 0$$

$$F(x) = \ln(-x), x < 0 \implies F'(x) = -(-1)x^{-1}, x < 0 = \frac{1}{x}$$

$$\implies \ln|x| - \text{Первообразная } \frac{1}{x}$$

Пример 2:

$$F(x) = |x| : \begin{cases} F'(x) = 1 (x > 0) \\ F'(x) = -1 (x < 0) \\ F'(0) : \nexists \end{cases}$$

Другое определение:

непрерывная функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на (X) , если $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$

$$\text{Исходя из этого } F(x) = |x| \text{ является первообразной (далее - ПО) для } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

\$1. Основная теорема интегрального исчисления

Если $F_1(x), F_2(x)$ - две ПО функции $f(x)$ на $\mathbb{X}$, то $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$

Доказательство:

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x) \forall x \in \mathbb{X} \quad (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \implies F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$$

Вывод: если $F(x)$ - одна из ПО Функции $f(x)$ на $\mathbb{X}$, любая другая ПО на $\mathbb{X}$ равна $\phi(x) = F(x) + C$

Примечание: промежутки $= [a, b] \quad (a, b) \quad [a, +\infty) \quad (-\infty, b] \quad \mathbb{R}$

Определение: совокупность всех ПО функции $f(x)$ на промежутку $\mathbb{X}$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутку $\mathbb{X}$

Обозначается: $\{F(x)\} = \int f(x)dx$

\$2. Свойства неопределённого интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$$

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Доказательство: $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\int dF = F(x) + c$

Доказательство: $\int dF = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$

3. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Доказательство: $\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = F_1(x) \pm F_2(x) + c \quad (1), \quad (F_1(x) \pm F_2(x))' = f_1(x) \pm f_2(x) \implies$

$\implies F_1(x) \pm F_2(x)$ - ПО для $f_1(x) \pm f_2(x)$, т.е. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = F_1(x) \pm F_2(x) + c \quad (2)$

Сравнивая правые части (1), (2) Получаем ф

4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

Доказательство тривиально и предоставляется на упражнение читателю.

\$3. Методы интегрирования

Замечание: $\exists f : F$ нельзя записать в элементарных функциях. Например, $\int e^{-x^2}dx$

1. Выучить таблицу интегралов

Пример: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

2. Использовать арифметические преобразования

Пример: $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} = [(3)] = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{x} dx = 2\sqrt{x} + \ln|x| + c$

3. Метод замены переменной

4. Метод интегрирования по частям

Метод замены переменной

Вспомним

Теорему о производной сложной функции:

Пусть $x = \varphi(t)$ задана на $\mathbb{T}$ и дифференцируема в точке $t_0 \in \mathbb{T}$.

Пусть $x_0 = \varphi(t_0)$.

Пусть $x = \varphi(t)$ принимает значения из $\mathbb{R}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{X}$ и дифференцируема в x_0 .

Тогда $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в t_0 и $y' = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}$

Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле:

Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема на $\mathbb{T}$

Пусть $F(x)$ - ПО функции $f(x)$ на $\mathbb{X}$

Пусть $D(\varphi(t)) = \mathbb{X}$ (D - область значений)

Тогда $F(\varphi(t))$ - ПО для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\mathbb{T}$

Доказательство: По теореме о производной сложной функции $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Следствие: $\int f(x)dx = F(x) + c = F(\varphi(t)) + c$. С другой стороны, по теореме, $F(\varphi(t))$ - ПО для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$. Сравнивая 2 уравнения, получаем:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \quad (1)$$

$\Rightarrow$ метод замены переменной

$\Leftarrow$ метод подстановки

Пример 1:

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{a^2} + 1} = [x = \frac{t}{a}, x' = \frac{1}{a}t'] = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

Пример 2:

$$\int te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int e^{-t^2} 2t dt = [x = t^2, dx = 2t dt] = \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \frac{-1}{2} e^{-x} + c$$

Пример 3:

$$\int (f(at + b))dt = [x = at + b, d(x) = a \cdot dt, dt = \frac{dx}{a}] = \frac{1}{a} \int f(x)dx = \frac{1}{a} F(at + b) + c$$

Пример 4 [подстановка] :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= [x = a \sin(t), dx = a \cos(t) dt] = a^2 \int \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t - \frac{a^2}{4} \sin(2t) + c = \frac{a^2}{2} \arcsin x - \frac{a^2}{2} \sin \arcsin x \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям

Теорема: Пусть функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы на промежутке $\mathbb{X}$.

Пусть $\exists$ ПО $u'(x)v(x)$ на $\mathbb{X}$.

Тогда $\exists$ ПО $u(x)v'(x)$ и верна формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int (u'(x)v(x))dx$$

Доказательство: $(u(x) \cdot v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \Rightarrow u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$

Тогда $\exists$ ПО правой части $\Leftrightarrow \exists$ ПО левой части, то есть:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \equiv \int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$