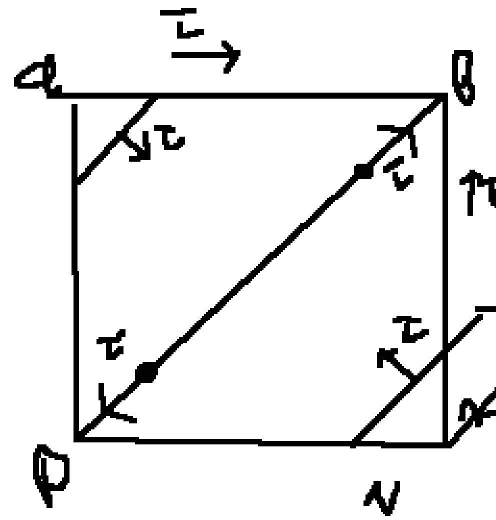
связь Модуль Юнга/сдвига



Чё тут происходит, я хз, потому что пришёл на Якуту вне контекста...) Но по сути тут 2 важных вещи, и это 2 последних строчек математики

Всё выражается через μ и E:

$\sigma_x = \tau,\ \sigma_y = \tau,\ \sigma_z = 0$

$\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x(1+\mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z))$

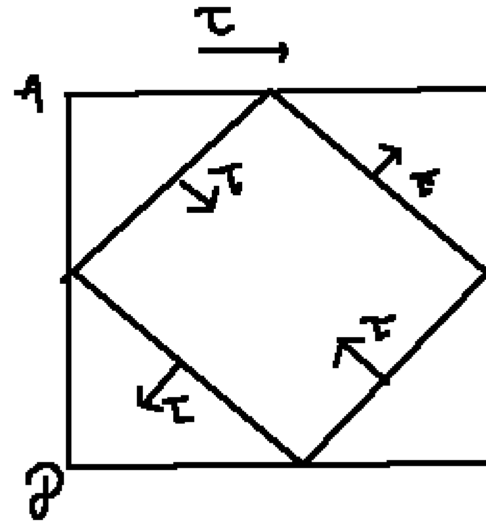
$\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y(1+\mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z))$

$\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_z(1+\mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z))$

$W = \dfrac{1}{2}\varepsilon_x\sigma_x + \dfrac{1}{2}\varepsilon_y\sigma_y = \dots = \dfrac{\tau^2(1+\mu}{E} = \dfrac{\tau^2}{2G} \implies$

$\implies G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$

$\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{(1-2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} = 0,$ Значит, при деформации сдвига объём не меняется



Волновые процессы

Волновой процесс - распространение волн (логично)

Не путаем скорость распространения волны в пространстве и скорость, которую имеет каждая частица среды

Поперечная волна - колебание частиц происходит перпендикулярно распространению волны (как на демонстрации)

Могут быть только при сдвиговых напряжениях!

Продольная волна - как звуковая волна, колебание параллельно распросранению волны

Можно запускать импульс разряжения и импульс сжатия

$\varepsilon = \dfrac{S(x+dx,t) - S(x,t)}{dx} = \dfrac{\partial S}{\partial x}$

$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)(dx + \varepsilon dx),\ \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 + \rho_0\varepsilon + \delta\varepsilon + \varepsilon\delta\rho \approx \varepsilon = -\dfrac{\delta\rho}{\rho_0}$

Давайте запишем диффур:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \tag{1}$$

Докажем:

Решение: $S = S(t \pm \dfrac{x}{c}) = S(\theta(x,t))$

$\theta = x \pm \dfrac{x}{c}$

По времени: $\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = v \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} \implies \dfrac{\partial S}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial S}{\partial \theta}) = \dfrac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}$

По координате: $\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{dS}{d\theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \pm\dfrac{1}{c}\dfrac{d^2 S}{d\theta^2}\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2 S}{d\theta^2}$

Ну и подстановкой... $\varepsilon = \pm\dfrac{v}{c}$

Рассмотрим плоскую бегущую гармоническую волну

Распространение волны приходит с задержкой по $\tau = \dfrac{x}{c}$
$S(x,t) = S_0 \cos(\omega(t-\tau)) = S_0 \cos(\omega t - \omega\tau) = S_0 \cos(\omega t - \dfrac{\omega}{c}x)$
$k = \dfrac{\omega}{c}$ - волновое число!

$$S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0 a) \qquad (2)$$

По косинусу, поэтому гармоническая

Бегущая, потому что распространяется

$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0, t = t_0 \implies \varphi(t_0) = \omega t_0 - kx + \varphi_0 = const$, поэтому плоская (Т.к. Образуется "Поверхность постоянной фазы" - плоскость)

Запишем выражение для фазы: $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$, рассмотрим поверхность постоянной фазы и как она смещается

$d\varphi = \omega dt - kdx = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{k} = c$, поэтому c называют фазовой скоростью волны

$S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$1. x = x_0 = const \implies \omega(t+T) - kx_0 + \varphi_0 = 2\pi, \omega T = 2\pi$

$2. t = t_0 = const \implies \omega t_0 - k(x+\lambda) + \varphi_0 = \omega t_0 - kx + \varphi_0 - 2\pi$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

λ - Длина волны

Объединим все формулы: $c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{\lambda}{2\pi} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ - известная со шоклы формула

Любую волну можно разложить в ряд фурье и привести к суперпозиции плоских бегущих гармонических волн

Конематика плоской бегущей гармонической волны

скорость: $S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$, $v(x,t) = \dfrac{\partial S}{\partial t} = -S_0\omega \sin(\omega t - kx) = S_0\omega\cos(\omega t - kx + \dfrac{\pi}{2})$
ускорение: $a(x,y) = \dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -S_0\omega^2\cos(\omega t - kx) = S_0\omega^2\cos(\omega t - kx + \pi)$
деформация: $\varepsilon(x,t) = \dfrac{\partial S}{\partial x} = S_0 k \sin(\omega t - kx) = \S_0 k \cos(\omega t - kx - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\sigma(x,t)}{E}$
Упражнение: $t = 0$ и нарисовать графики

Скорости волн в упругих средах

Рассмотрим струну:

$dl \approx dx$

$ox:\ Sdx\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(x+dx)\cos\alpha(x+dx)$

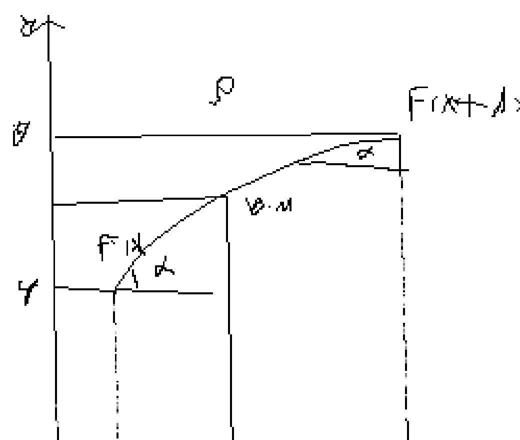
$oy:\ \rho dx\dfrac{d^2y}{dt^2} = f(x+dx)\sin\alpha(x+dx) - F(x)\sin\alpha x$

$\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha$

$F(x) = F(x+dx) = T$

$\rho dx\dfrac{d^2y_{c.m.}}{dt^2} = T(\tan\alpha(x+dx) - \tan\alpha(x)) = T(\dfrac{dy}{dx}|_{x+dx} - \dfrac{dy}{dx}|_x) == T\dfrac{d^2y_{c.m.}}{dt^2}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{T}{S}\dfrac{d^2y_{c.m.}}{dx^2}, \quad c = \sqrt{\dfrac{T}{S}}$

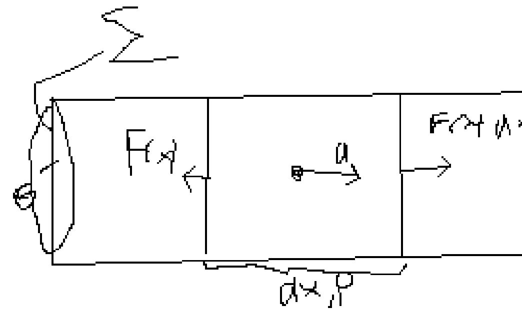


Рассмотрим стержень:

$$\rho dx \frac{d^2 x_c}{dt^2} = F(x+dx) - F(x) = E(\varepsilon(x+dx) - \varepsilon(x)) =$$

$$= E(\frac{dS}{dx}|_{x+dx} - \frac{dS}{dx}|_{x}) = E\frac{d^2 S_c}{dx^2}dx$$

$$\frac{d^2 S_c}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2 S_c}{dx^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



Рассомтрим трубку с Газом:

$$\rho_0 \Sigma dx \frac{d^2 S_c}{dt^2} = \Sigma \delta P(x) - \delta P(x+dx)$$

$$P = P(\rho), \quad \delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho}|_{\rho_0} = \frac{\partial P}{\partial \rho}|_{\rho_0}(-\varepsilon \rho_0)$$

$$\rho_0 \Sigma dx \frac{d^2 S_c}{dt^2} = \Sigma \rho_0 \frac{dP}{d\rho}(\varepsilon(x+dx) - \varepsilon(x)) = \Sigma \rho_0 \frac{dP}{d\rho}(\frac{dS}{dx}|_{x+dx} - \frac{dS}{dx}|_{x})$$

$$\frac{d^2 S_c}{dt^2} = \frac{dP}{d\rho}_{\rho_0} \frac{d^2 S_c}{dx^2}, \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}_{\rho_0}}$$