

Скорость распространения волны в стержне

Продольная волна: $\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}$

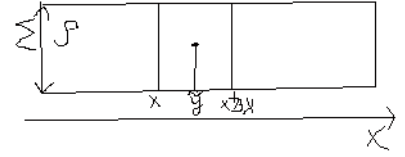
$$\rho \Sigma \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) = (\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)) \Sigma = (\varepsilon(x + \Delta x) - \varepsilon(x)) \Sigma E = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \Sigma E = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \Delta x \Sigma E$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{R}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{R}{\rho}}$$

Для толстого стержня скорость распространения поперечной волны:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$



Распространение Волн в газе

Всё то же самое, есть столб газа, ось x , точки $x, x + \Delta x, \tilde{y}$, есть равновесное давление ρ_0 , а внутри деформируемого участка $\rho_0 + \Delta \rho$ слева на кусочек действует $\Sigma \delta P(x)$, справа $\Sigma \delta P(x + \Delta x)$

$$\delta P = -\sigma \quad (\sigma \propto \varepsilon)$$

$$\rho_0 \Sigma \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \Sigma (\delta P(x) - \delta P(x + \Delta x)) =$$

$$= [\text{Пусть есть } P(\rho) \quad \delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \delta \rho \varepsilon = -\frac{\delta \rho}{\rho_0}] =$$

$$= \Sigma \rho_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0} (\varepsilon(x + \Delta x) - \varepsilon(x)) = \Sigma \rho_0 \frac{\delta \rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) = \Sigma \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \right)}$$

Процессы сжатия/растяжения - адиабатические

$$P(\rho) = \text{const} \cdot \rho^\gamma, \quad \gamma_{\text{air}} \approx 1.41 \quad P = \frac{\rho R T}{\mu}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} = \text{const} \cdot \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{\gamma R T}{\mu} \implies c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Скорость звука в жидкости

Идейно - то же самое, что и с газом, вывод абсолютно такой же

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0}$$

Разница в том, что невозможно записать уравнение состояния

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad C = \frac{dP}{\rho} = \frac{dP}{d \frac{M}{V}} = \frac{DP}{M \left(\frac{-dV}{V^2} \right)} = \frac{1}{\frac{M}{V} \left(-\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \right)}$$

$$\text{Получаем сжимаемость } \gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}, \text{ тогда скорость звука } c = \sqrt{\frac{1}{\rho \gamma}}$$

Энергия бегущей волны

Введём объёмную плотность энергии $w = \frac{W}{V}$

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) \quad W_k = \frac{Sv^2}{2} = \frac{S}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$W_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} E S_0^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx) = [E = Sc^2, k = \frac{\omega}{c}] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \implies W_k = W_p = 2W_k = \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 (1 - \cos(2(\omega t - kx)))$$

Значит, что волна энергии колеблется на двойной частоте, энергия не бывает отрицательной, колебания энергии происходят вокруг некоторого среднего значения.

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2$$

Значит, что бегущая волна переносит энергию

Вектор Умова(-Поинтинга)

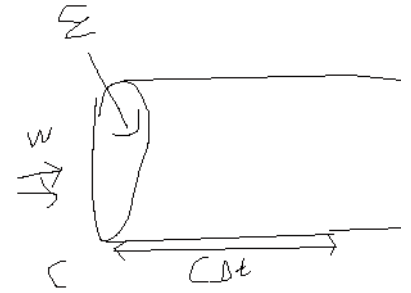
Это вектор, описывающий перенос энергии

$$W = w \cdot c \Delta t \Sigma$$

$$J = \frac{W}{\Delta t \Sigma} = wc - \text{Плотность потока энергии}$$

$$\vec{J} = w\vec{c}, \quad \langle J \rangle = I = \langle w \rangle c = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 c = I$$

I - средняя плотность потока энергии/интенсивность волны



Акустический "Закон Ома"

$\sigma_0 = E\varepsilon_0 = ES_0K$ - амплитуда напряжений

$$\delta P = -\sigma \implies \delta P_0 = \sigma_0$$

$$[E = \rho c^2 \quad S_0 = \frac{v_0}{\omega} \quad k = \frac{\omega}{c}]$$

$$\delta P_0 = \dots = \rho c v_0 \implies v_0 = \frac{\delta P_0}{\rho c}$$

ρc решили назвать акустическим сопротивлением (или акустическим импедансом), так как оно довольно часто встречается в формулах

$$\text{Тогда формула для интенсивности: } I = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 c = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\delta P_0)^2}{(\rho c)^2} = \frac{1}{2} \frac{(\delta P_0)^2}{\rho c}$$

Стоячие волны

$$\begin{cases} S_1(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) \\ S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx) \end{cases} \implies S(x, t) = S_1(x, t) + S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) + S_0 \cos(\omega t + kx) =$$

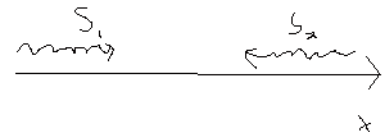
$$2S_0 \cos \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \cos \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = 2S_0 \cos \omega t \cos kx = S(x, t) - \text{это и называется стоячей волной}$$

$$1) x = x_0 = \text{const} \implies S(x_0, t) = 2S_0 \cos \omega t \cos kx_0$$

- разные точки колеблются с разными амплитудами

$$2) t = t_0 = \text{const} \implies S(x, t_0) = 2S_0 \cos \omega t_0 \cos kx$$

- "на фотографии" есть точки, которые равны нулю, то есть вообще не колеблются



$$\cos kx = 0 \implies kx_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \quad \Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} - \text{стоячие точки}$$

$$\cos kx = \pm 1 \implies kx_n = (n-1)\pi \implies \Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

В аналогии с бегущей волной можно говорить о волне скоростей, ускорений и т.п.

$$S(x, t) = 2S_0 \cos \omega t \cos kx \implies$$

$$v(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} = -2S_0 \omega \sin(\omega t) \cos(kx)$$

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -2S_0 \omega^2 \cos(\omega t) \cos(kx)$$

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x} = -2S_0 k \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Когда рассматривают отражение волны от границы, есть несколько типов границ

1. граница закреплена - $S(x, t) = 0$ - колебания на границе равны нулю

2. граница свободна - $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ - деформации на границе равны нулю

Дёргаем шнур, закреплённый другим концом на стене:

$$S(0, t) = S_0 \cos \omega t \quad \tau_1 = \frac{x}{c} \quad S_1(x, t) = S_0 \cos(\omega(t - \tau_1)) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

Но возникнет волна, которая пойдёт в другую сторону. Считаем, что волна отражается полностью, и что у отраженной волны другая фаза

$$\tau_2 = \frac{l + l - x}{c} = \frac{2l - x}{c} \quad S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega(t - \tau_2) + \varphi) = S_0 \cos(\omega t - k(2l - x) + \varphi)$$

S_1 - это волна от своих колебаний, S_2 - это волна от отражённых колебаний. Получим полное колебание:

$$\begin{aligned} S(x, t) &= S_1(x, t) + S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx) + S_0 \cos(\omega t - k(2l - x) + \varphi) = \\ &= 2S_0 \cos \frac{\omega t - kx + \omega t - k(2l - x) + \varphi}{2} \cos \frac{\omega t - kx - \omega t + k(2l - x) - \varphi}{2} = 2S_0 \cos(\omega t - kl + \frac{\varphi}{2}) \cos(k(l - x) - \frac{\varphi}{2}) \\ &= A(t) \cos(k(l - x) - \frac{\varphi}{2}) \end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи:

$$1) S(l, t) = 0 \quad \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \implies \varphi = \pi$$

$$2) \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad kA(t) \sin(k(l - x) - \frac{\varphi}{2}) = 0 \implies \varphi = 0$$