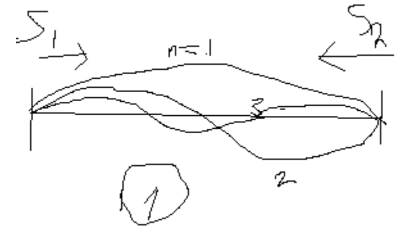
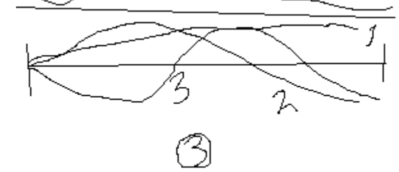
Нормальные колебания стержня, струны, столба газа

$S(x,t) = A(t)\cos(k(l-x) - \frac{\varphi_{rev}}{2})$

Сейчас будем рассматривать разные случаи граничных условий

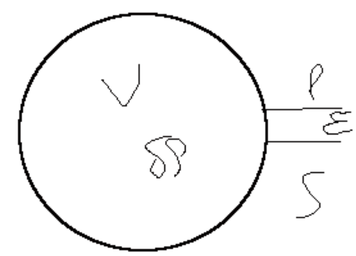


1. оба конца закреплены:
   $x_0 = 0, x_1 = 0, \quad S(o,t) = S(l,t) = 0 \implies S(0,t) = A(t)\cos(xl - \frac{\varphi}{2}) = S(l,t) = A(t)\cos(-\frac{\varphi}{2}) \implies \varphi = \pi, \quad \sin xl = 0, kl = \pi n, n \in \mathbb{N}, \quad l = 2n\frac{\lambda}{4}$, то есть если оба конца закреплены, то на длине струны должно уладываться целое число полуволн! Что супер логично, если об этом подумать. $l = \frac{n}{2}\frac{c}{\nu_n} \implies \nu = \frac{cn}{2l}$. ν_1 - основной тон, а остальные ν_n - это обертона



2. Оба конца свободны
   $\frac{dS}{dx}_| x = 0, x = l = 0 \implies A(t)k\sin(kl - \frac{\varphi}{2}) = A(t)k\sin(-\frac{\varphi}{2}),$
   $\varphi = 0, \sin kl = 0$, значит, набор частот и условий существования стоячих волн такие же, разве что на концах струны будут пучности, а не узлы

3. Один конец закреплён, второй свободен
   $\frac{dS}{dx}|_{x=l} = 0, S(0,t) = 0 \implies A(t)\cos(kl - \frac{\varphi}{2}) = A(t)k\sin(-\frac{\varphi}{2}) \implies \varphi = 0, \quad \cos kl = 0, \quad k_n l = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$
   $l = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_n}{2\pi} = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$, то есть должно помещаться НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО ЧЕТВЕРТЕЙ
   $l = (2n-1)\frac{c}{4\nu} \implies \nu_n = \frac{c(2n-1)}{4l}$



Резонатор Гольмгольца

Берут такой сферический сосуд с отверстием

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Sigma\rho}{V}$$

$$c^2 = \frac{\delta P}{\delta\rho}, \quad \rho_0 \Sigma l \frac{d^2S}{dt^2} = \delta P \Sigma = -\frac{c^2\Sigma^2 S}{V}$$

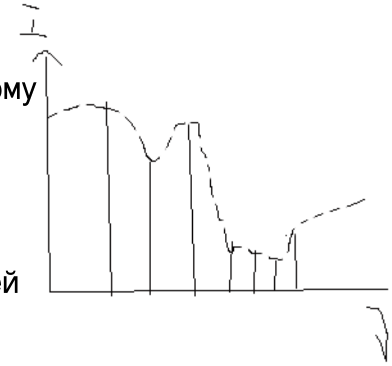
$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{c^2\Sigma}{lV}S = 0, \quad \omega_0 = c\sqrt{\frac{\Sigma}{lV}} = 2\pi\nu$$

Элементы акустики, высота и тембр тона

есть 3 характеристики звуковой волны:

1. высота

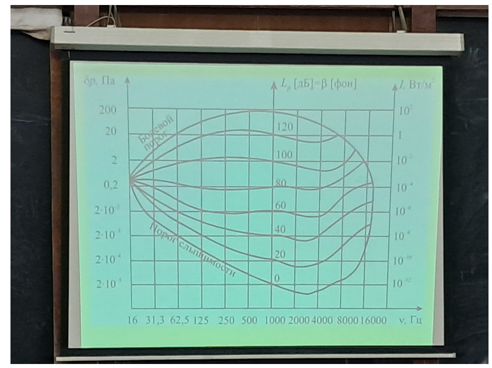
   Интенсивность первой гармоники обычно самая большая, поэтому она задаёт высоту тона. Иногда, редко, бывает и по-другому, тогда высота определяется самым высоким тоном



2. тембр

   Определяется спектром [соотношением частот и интенсивностей тонов]

   Если спектр линейчатый - то это воспринимается ухом как тон (И). Иначе это воспринимается как шум (ЩЩЩЩЩЩЩ!)



3. громкость

   Характеристика вообще субъективная. Но $\dfrac{\Delta I}{I}$, которая воспринимается человеком, ~ 0.1, и это называется законом Вебера.

   Введём единицу громкости $\dfrac{dI}{I} = Ad\beta$, где β - громкость звука $\implies \beta = \dfrac{1}{A} \ln \dfrac{I}{I_{edge}}$, и называется это законом **Вебера-Фехнера**.

   Обычно выбирают $A = \ln 10 \implies \beta = \lg \dfrac{I}{I_{edge}}$ Но получилось так, что громкость всё ещё субъективная, и β определяется ухом

   L_I - корень интенсивности = $\lg \dfrac{I}{I_{edge}} = \lg \left(\dfrac{\delta P}{\delta P_{edge}}\right)^2 = 2 \lg \dfrac{\delta P}{\delta P_{edge}} = L_P$, где $\delta P_{edge} = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Это уже измеряется в **Белах**, но Белы довольно большие, поэтому используют **Децибелы**. Это безразмерная величина, и **Дб** = $10 \lg \dfrac{I}{I_{edge}}$

   К сожалению, объективная и субъективная оценка грокости не совпадают, соотношение у них довольно сложное и определяется диаграммой слуха, где по оси x отложена частота, а по y - разность L_P (Дб) и β (фон). Линиями обозначены линии одинаковой громкости

Определение:
Громкость звука в фонах для тона данной частоты равна уровн звукового давления в децибелах для тона частотой 1кГц, воспринимаемого ухом как звук равной громкости

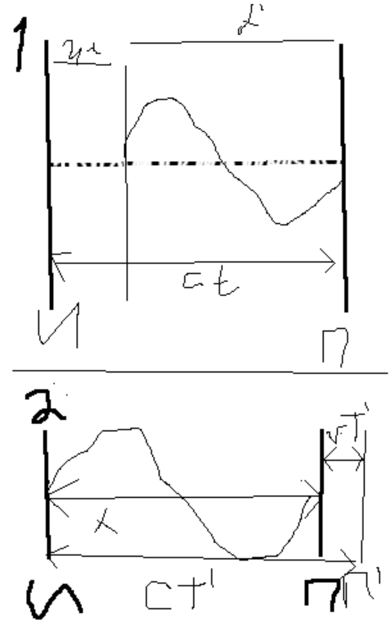
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ
ГOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOЛ

Бинуаральный эффект

измеряется $\Delta\varphi$, и частота должна быть МЕНЬШЕ $\dfrac{c}{2L} \sim 1$кГц

Эффект доплера

Эффект изменения частоты волны, регистрируемой приёмником, при относителном движении волны и (или) приёмника



1. Движется источник к приёмнику, дано ν, найти ν'

   Длина волны как-бы сжимается

   $\lambda' = cT - uT = (c-u)T, \nu' = \dfrac{c}{T(c-u)} = \dfrac{\frac{1}{T}}{1-\frac{u}{c}} = \dfrac{\nu}{1-\frac{u}{c}}$

2. Движется приёмник от источника

   Конец волны придёт в приёмник позже, чем начало, поэтому волна как-бы растягивается

   $\nu' = \dfrac{1}{T}' = \dfrac{c-v}{\lambda} = \dfrac{c-v}{c}\nu = \left(\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\right)\nu$

3. Движется ВСЁЁЁЁЁЁЁЁЁ

   $\nu' = \nu\dfrac{1-\frac{v}{c}}{1-\frac{u}{c}}$ =[Учитывая направление]$= \nu\dfrac{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{c}}{c^2}}{1-\frac{\vec{c}\cdot\vec{u}}{c^2}}$.

   Как запомнить? сверху вниз П↓И

Примечание: может показаться, что формулы не симметричны против преобразований Галлилея, но это потому, что мы рассматриваем частоту. Если записать рассмотренный период, то всё норм

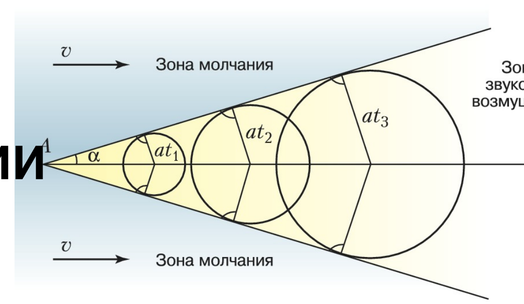
Движение быстрее скорости звука

Конус маха: хрень движется из точки A в точку B за время t со скоростью V в среде со скоростью звука c. Образуется такой своеобразный конус

Очевидно, что $\sin\alpha = \dfrac{c}{v} < 1$. А число Маха $M = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{v}{c} > 1$

чё-то

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$



Основы ГИДРО И АЭ РО СТАТ ИК ИИИИИИИИИ

Изучает вопросы равновесие жидкостей и равновесие тел, находящихся в жидкостях (и газах)

Жидкости и газы - это те среды, в которых при равновесии не может существовать касательные напряжения

Если говорить про жидкость, то у неё есть **коэффицент сжимаемости**: $\alpha = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\Delta V}{\Delta P} = -\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dP}$

Примечание: α - ДОХУЯ МАЛЕНЬКИЙ
Будем говорить о несжимаемой ($\alpha = 0$) идеальной жидкости ($\nexists \sigma_\tau$)
Есть 3 типа сил:

1. $\Delta F \sim \Delta V$

2. $\Delta F \sim \Delta S$ - их рассматривать не будем

3. ΔF^P

$$dF^P = P(x)s - P(x+dx)S = -(P(x+dx) - P(x))S = -\frac{dP}{dx}Sdx = -\frac{dP}{dx}dV = -\frac{\partial P}{\partial x}dV\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}dV\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z}dV\vec{e}_z = -(\frac{\partial P}{\partial x}e_x + \frac{\partial P}{\partial y}e_y + \frac{\partial P}{\partial z}e_z)dV = -\nabla PdV = -gradPdV$$

$dF^P = -\nabla PdV$!!!!!!!!

$\rho dV\frac{dv}{dt} = dF^V + df^P \implies \rho\frac{dv}{dt} = \frac{dF^V}{dV} + \frac{dF^P}{dV} = \vec{f} - \nabla P$

$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} - \nabla P$!!!!!!!!!!! - уравнение эйлера

А теперь гидростатика:$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \implies \vec{f} = \nabla P$ - основное уравнение гидростатики

Закон паскаля

$I = 0 \implies \nabla P = 0,$

$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z = 0 \implies \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \equiv P(x,y,z) = const$

Словами: В отсутствие массовых сил при равновесии давление во всех точках жидкости и во всех направлениях одинкаовое

ИЛИ

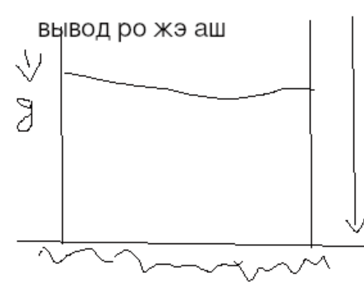
В отсутствие массовых сил при равновесии давление со свободной поверхности жидкости без изменений передаётся во все её точки

Рассмотрим жидкость в однородном поле силы тяжести

$\vec{f} = +\rho\vec{g} = \rho g\vec{e_z}$

$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z = \vec{f} = \rho g\vec{e}_z$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y = 0 \implies P(z) = P_0 + \rho gz \\ \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z = \rho g \end{cases}$$



рассмотрим изотермическую атмосферу

$\rho = \frac{\mu P}{RT}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\mu Pg}{RT} = \frac{dP}{dz}$

$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}dt \implies P = P_0 e^{-\frac{\mu gz}{RT}}, \qquad z_0 = \frac{RT}{\mu g},$

$P = P_0 e^{-\frac{z}{z_0}}$ - и мы получили БАРОМЕТРИЧЕСКУЮ формулу! для земли барометрическая высота $z_0 =$ 8км

Закон Архимеда

Позволяет установить, чему равна сила, возникающая со стороны жидкости/газа на погружённое туда тело

Выделим внутри жидкости произвольный объём, он в равновесии, тогда

$m\vec{g} = -\vec{R}_P, \qquad F_a = mg = \rho gV$

То есть ЧИСЛЕННО Выталкивающая сила равна произведению массы "заменённой" жидкости, направлена вертикально вверх и приложена к центру масс "заменённой" жидкости, то есть к **Центру плавучести**

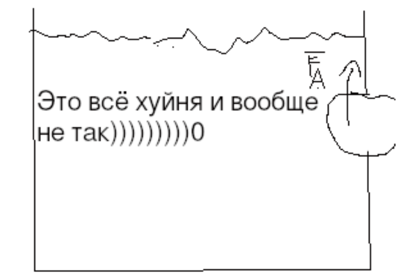
Условие Плавучести тела: $\dfrac{V_T}{V_{subm}} = \dfrac{\rho_{liq}}{\rho_{body}} \geq 1 \implies \rho_{liq} \geq \rho_{body}$

Вопрос Остойчивости

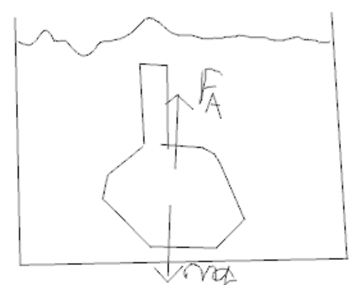
1. Тело полностью погружено - тут всё понятно
2. Тело погружено частично - тут уже сложнее, рассмотрим симметрично плавающее тело
3. корабль: Метацентрическая высота - это расстояние между центром масс корабля C и метацентром M (центр кривизны траектории, по которой перемещается точка приложения сил плавучести в процессе наклонения судна)

И метацентрическая высота должна быть положительной, чтобы плавучесть была устойчивой

Модель вечного двигателя



А тут ауот плотность равна плотности жидкости



Ауот тут чёт не оно

Гидростатика

Представим себе, что ***т е ч ё т ж и д к о с т ь***. Будем в каждый момент времени фиксировать, чему равна скорость каждой бесконечно малой частички жидкости.
Получаем ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ - это векторная функция координаты и времени. Ну и иногда бывает, что поле скоростей зависит только от координаты, и такое течение называется **стационарным**

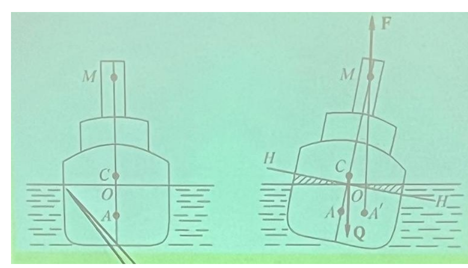
Стационарное течение - такое, в котором поле скоростей $\vec{v}$ зависит только от координаты и не зависит от времени.

Линия тока - линия, касательная к которой совпадает с направлением вектора скорости тока

Трубка тока - Проведём в жидкости некоторый контур и проведём через все точки этого контура линии тока. Ну и получим трубку тока

Получаем несколько важных и полезных условий:

1. Условие неразрывности: $\rho = const \implies$ если трубка разной ширины, то сколько жидкости втекло за единицу времени с одной стороны, столько и вытекло с другой
$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t \implies$ **Sv** $=$ **const**.



Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли: Распределение давлений в трубке токааааа для **стационарного движения идеальной сжимаемой жидкости**

$$A_1 = P_1 S_1 \Delta l_1 \quad = P_1 \Delta V_1 = P_1 \frac{\Delta m}{\rho_1}, \qquad A_1 + A_2 = E_2 - E_1, \qquad \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} =$$

$$A_2 = \dots = \dots \quad \dots = \dots = -P_2 \frac{\Delta m}{\rho_2}$$

$$= \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \qquad \varepsilon = \frac{E}{\Delta m}$$

$$\frac{P}{\rho} + \varepsilon = const, \quad E = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta mgh \implies \varepsilon = \frac{v^2}{2} + gh,$$

$\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = const' = B$ - постоянная Бернулли