Содержание

Лекция 1 (2025-02-11)

ФНП

Множества точек

Определения:

Точка: Упорядоченная совокупность вещ. чисел $(x_1, \ldots, x_n)$; x_i называется координатами точки

M-мерное координатное пр-во: Совокупность всех точек с M координатами

Множество точек: Любая совокупность точек M-мерного коорд. пр-ва

Расстояние между точками: $M_1(x_1^1, \ldots, x_n^1), M_2(x_1^2, \ldots, x_n^2) : \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2}$

M-мерное Евклидово пр-во: Такое пр-во, в котором расстояние между точками введено по прошлой формуле $\mathbb{R}^m$

Начало координат: Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$

Открытый шар: Множестчо точек $\left\{M \in \mathbb{R}^m | \rho(M, A) < R,\ A(a_1, \ldots, a_m),\ R \in \mathbb{R}^+\right\}$. A - центр, R - радиус

ε-окресность A: $\{M \in \mathbb{R}^m | \rho(M, A) < \varepsilon\} =: \Omega_\varepsilon(A)$

Прямоугольная окресность $A(a_1, \ldots, a_m)$: $\{M \in \mathbb{R}^m | \, |x_i - a_i| < c_i (c_i > 0 \forall i)\}$

Внутренняя A точка мн-ва $\{M\}$: $\exists \Omega_\varepsilon(A) \in \{M\}$

Граничная точка A мн-ва $\{M\}$: в $\forall \Omega_\varepsilon(A)\ \exists M \in \{M\}, \exists M' \notin \{M\}$

Изолированная точка A мн-ва $\{M\}$: $\exists \Omega_\varepsilon(A) : \nexists (M \neq A) \in \Omega$ (есть окресность, в которой нет точек)

Предельная точка A мн-ва $\{M\}$: $\forall \mathring{\Omega}_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\}$ (в любой окресности есть точки из мн-ва)

Граница $\{M\}$: Совокупность всех граничных точек мн-ва $\{M\}$
Замкнутое множество: такое мн-во, которое содержит все свои граничные точки
Открытое множество: Все точки множества внутренние
M ограничено, если оно целиком содержится в некотором шаре
($\exists R > 0, A \in \mathbb{R}^m : \forall M \in \{M\} : \rho(M, A) < R$)
Непрерывная кривая в $\mathbb{R}^m$: мн-во точек $\left\{M(x_1, \ldots, x_m) | x_i \overset{\text{непр.}}{=} \varphi_i(t), t \in [\alpha, \beta]\right\}$
Концы кривой: точки $[A(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha)), B(\varphi_1(\beta), \cdots \varphi_m(\beta))]$
Кривая замкнутая, если $A = B$
Прямая в по-ве $\mathbb{R}^m$: мн-во $\left\{M_i(x_1, \ldots, x_m) | x_i = \overset{\circ}{x}_i + a_i t, t \in \mathbb{R}\right\}$
Связное мн-во: $\forall M_1, M_2 \in \{M\}$ можно соеднить непр. кривой, лежащей в $\{M\}$
По определению ТОЛЬКО $\mathbb{R}^m, \emptyset$ являются и открытыми, и замкнутыми

Пример: $\left\{M(x_1, \ldots, x_n) | \forall i \in \overline{1, m}\ x_i \in \mathbb{Q}, |x_i| < 1\right\}$
$\forall M \in \{M\}\, \forall \Omega_\varepsilon(M)$ содержит точки с иррац коорд-ми, все эти точки так же являются граничными
То есть граничные точки и ВСЕ те, которые принадлежат множеству. и ВСЕ те, которые лежат "внутри куба", т.е. граница > мн-ва

Утверждение: Любая внутренняя точка мн-ва является предельной
Док-во: Дано: $\exists \Omega_{\varepsilon_0}(A) \subset \{M\}$, Доказать: $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \Omega_\varepsilon(A)$
Для $\varepsilon > \varepsilon_0 : \forall M \in \Omega_{\varepsilon_0}(A) \in \{M\}$
Для $\varepsilon < \varepsilon_0 : \Omega_\varepsilon(A) \subset \Omega_{\varepsilon_0}(A) \subset \{M\} \implies \forall M \in \Omega_\varepsilon(A) \in \{M\}$

Утверждение: Любая граничная точка множества является либо предельной, либо изолированной

1. $\begin{cases} \text{Дано: } \forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\}, \exists M' \notin \{M\} (M, M' \in \Omega_\varepsilon(A)) \\ \text{Отрицание изолированной: } \forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\} (M \neq A) \end{cases} \implies \forall \overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\} \implies$
$\implies A$ - пред. точка
2. Если $\exists \Omega_\varepsilon(A), \exists! A \in \{M\}$, то A - изолированная

Очень важное следствие: Замкнутое мн-во содержит все свои предельные точки

Посл-ти точек в $\mathbb{R}^m$

Определения:
Если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие точка $M_n \in \mathbb{R}^m$, то это посл-ть точек
Посл-ть точек ограничена, если $\exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \rho(M, 0) < R$

Лемма: Чтобы посл-ть была ограниченной $\iff$ чтобы были ограничены посл-ти координат
Док-во:

1. Достаточность: $\{x_i^n\}$ огр.: $\exists R^n > 0 : \forall n |x_i^n| \leq \dfrac{R}{\sqrt{m}} \implies \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \dfrac{R^2}{m}} = R$

Лекция 2 (2025-02-18)

Лемма о координатной ограниченности: Для того, чтобы последовательносто $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$ была ограничена $\iff$, чтобы были ограничены посл-ти координат
Необходимость: если ограничена, то координаты ограничены.

Дано: $\exists R > 0 : \forall n \rho(0, M_n) < R \implies \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < \implies |x_i| < R$, доказано

Примечание: $\forall m, \forall m'$ обозначают "все координаты"

А теперь определения и леммы:

- $A = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$, если $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n < N : \rho(M_n, A) < \varepsilon$
- Лемма: если $\{M_n\} \in \{M\}$ - замкнутое мн-во, $\{M_n\} \to A \implies A \in \{M\}$
  Док-во:
  1. $\exists n, M_n = A \implies A \in \{M\}$
  2. $\forall n\, M_n \neq A, \{M_n\} \to A \implies \forall \overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon(A) \exists M_n \in \{M\}$; A - предельная точка $\{M\}$, а замкнутое мн-во содержит свои предельные точки
- Лемма о покоординатной сходимости: $\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\} \to A(a_1, \dots, A_m) \iff \forall m' : \{x_{m'}^n\} \to a_{m'}$
  Доказательство достаточно простое :)
- Фундаментальная посл-ть $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$: $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : \rho(M_n, M_{n+p}) < \varepsilon$
- лемма о покоординатной фунд-сти: $\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$ - фунд. $\iff \forall m' : \{x_{m'}^n\}$ - фунд.
- Теорема $\{M_n\}$ сходится $\iff \{M_n\}$ фунд. Док-во:
  Достаточность: фунд $\implies$ сход; по лемме о координатной фунд-сти $\{x_i^n\}$ - фундаментальные числовые последовательности $\implies$ они сходятся. По лемме о координатной сход-сти $\{M_n\}$ сходится
- Подпоследовательность: пусть $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$, выберем $\{K_n\} \in \mathbb{N}, \forall n : k_n \geq n \wedge k_{n+1} > k_n, \forall n$. Тогда подпосл. - это M_{k_n}
- Лемма: Если $\{M_n\} \to A \implies \forall K_n : \{M_{K_n}\} \to A$. Доказательство:
  $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : \rho(M_n, A) < \varepsilon;\ K_n > n > N \implies \rho(M_{K_n}, A) < \varepsilon$
- ТЕОРЕМА Больцано-Вейерштрасса: Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Доказательство:
  По лемме о коорд. огран-сти $\forall i \in \overline{1,m} \left\{\overset{n}{x}_i\right\}$ – огр.
  Выберем из $\left\{\overset{n}{x}_1\right\}$ сходящуюся $\left\{\overset{k_n^1}{x}_1\right\} \to a_1$.
  Рассмотрим $\left\{M_{k_n^1}\right\} \subset \left\{M_n\right\}, M_{k_n^1} = (\overset{k_n^1}{x}_1, \dots, \overset{k_n^1}{x}_m)$ - ограничена, сходится к $A(a_1, \dots, a_m)$
  выделим $\left\{\overset{k_n^2}{x}_1\right\} \subset \left\{\overset{k_n^1}{x}_1\right\} \to a_1$
  Рассмотрим $\left\{M_{k_n^2}\right\} \to A$, через m итерация $\left\{M_{K_n^m}\right\} \to A(a_1, \dots, A_m)$
  По лемме о покоординатной сходимости: $\left\{M_{k_n^m}\right\} \to A$

$ 3. Понятие ФНП

Определения:

- Область в $\mathbb{R}^m$ - всякое открытое связное множество
- Если каждой точке в множестве $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$ поставлено в соответствие число $u \in \mathbb{R}^1$, то на множестве $\{M\}$ задана функция $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 = f(M)$
- Предел ФНП: пусть $f(M)$ опр. в области $\mathcal{D}$, A - пред. точка $\mathcal{D}$.
  по Коши: $(b = \lim\limits_{M\to A} f(M)) \iff (\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall M \in \mathcal{D}, \rho(M, A) < \delta : |f(M) - b| < \varepsilon)$
  по Гейне: $(b = \lim\limits_{N\to A} f(M)) \iff (\forall \{M_n\} \subset \mathcal{D}, \forall n\, M_n \neq A, \{M_n\} \to A : \{f(M_n)\} \to b)$
- Теорема: определения предела ФНП по Коши и по Гейне эквивалентны. Доказательство аналогично случаю функции 1 переменной.
  Пример 1: $U^I(M) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ - на осях равна нулю, везде кроме этого равна единице.

$$\begin{cases} \left\{M_n^1\right\} = \left\{(\frac{1}{n}, 0)\right\} \to 0 \\ \left\{M_n^2\right\} = \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right\} \to 1 \end{cases}$$ - предела не существует

$U^{II}(M)$: не существует на осях, везде равна единице - предел существует (тоже по гейне)

Пример 2: Докажем, что Если $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$, то $M(x,y) \to O(0,0)$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta\,\forall M \in \mathbb{R}^2 \left\{ox, oy\right\}, 0 < \rho(M, 0) < \delta : |x+y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$$

$0 < \rho(M,)) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies |x| < \delta, |y| < \delta, |x+y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right| < |x+y| < |x|+|y| < 2\delta \implies \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

- Определение: $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 = f(M)$ удовлетворяет Критерию коши в точке M_0, если
  $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall M_1, M_2 \in \overset{\circ}{\Omega}_\delta(M_0) : (\rho(M_1, M_0) < \delta \wedge \rho(M_2, M_0) < \delta \implies |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon)$
  ЭТО НАДО ПЕРЕФОРМУЛИРОВАТЬ, ПОТОМУ ЧТО ЛЕВАШОВА ЗАПУТАЛАСЬ.
- Теорема о критерии Коши для функций:
  Чтобы существовал предел u в точке M_0, она должна удовлетворять критерию Коши в этой точке
- Определение: $f(M)$ бесконечно малая (БМ) в точке A, если $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$
- Определение: Пусть $f(M), g(M)$ БМ в точке A, тогда $f(M) = o(g(M))$, если $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)} = 0$

Лекция 3 (2025-02-20)

Лекция 3

теоремы о БМ:

Если $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $f(M) \to 0, g(M) \to 0, \rho(M, M_0) \to 0$, то $\{f(M) \pm g(M)\} \to 0$

Если $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $f(M) \to 0, \rho(M, M_0) \to 0, g(M)$ огр., То $f(M) \cdot G(M) \to 0$

Если $f(M) \to 0$ при $\rho(M, M_0) \to 0$, то $\frac{1}{f(M)} \to \infty$

"Очень Важная Лемма":

Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = b$, то $f(M) = b + \alpha(\rho(M, M_0))$, где $\alpha \to 0$ при $\rho(M, M_0) \to 0$

Док-во:

Взять определение предела, написать, что $\alpha(\rho) = |f(M) - \beta|$, по сути гг

Лемма, обратная к "Очень Важной Лемме":

Если $f(M)$ представима в виде $f(M) = b + \alpha(\rho(M, M_0))$, где $\alpha \to 0$, тогда $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = b$

Теоремы об арифметических операциях:

Пусть $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $\exists \lim\limits_{M\to M_0} f(M) =: a, \lim\limits_{M\to M_0} =: b$. тогда

- $\exists \lim\limits_{M\to M_0} f(M) \pm g(M) = a \pm b$
- $\exists \lim\limits_{M\to M_0} f(M) \cdot g(M) = a \cdot b$
- И если $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}$

Примеры вычисления пределов:

$\lim\limits_{\{x\to 0, y\to 2, z\to 3\}} \dfrac{\sin xyz}{x} = \lim\limits_{\{t\to 0, y\to 2, z\to 3\}} yz\dfrac{\sin t}{t} = 6$

иногда удобно перейти к полярным координатам:

$\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = [x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi] = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$, значит, предел $\nexists$

$ 4. Непрерывность ФНП.

Определение:

Пусть $f(M)$ определена на $\mathbb{M}$, M_0 - пред. точка $\mathbb{M}$

Тогда $f(M)$ непрерывна в M_0, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$

(по Коши) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0, \underbrace{\rho(M,M_0)}_{=\sqrt{\sum_{i=1}^m (M_i-M_{0i})^2}} < \delta : |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$

Пусть $\Delta x_i := x_i - \overset{\circ}{x}_i$, Тогда $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_m), M(x_1+\Delta x_1,\dots,x_m+\delta x_m)$

По лемме о покоординатной сходимости: $M\to M_0 \iff \forall i=\overline{1,m}\ \Delta x_i\to 0 \iff \rho(M,M_0)\to 0$

$f(M)$ непр $\overset{\text{def}}{\iff} M\to M_0 \implies f(M)\to f(M_0)$;

$\Delta f = f(M)-f(M_0)\to 0$, если $\Delta x_i\to 0 (\forall i\in\overline{1,m})$ - разностная форма определения непрерывности!

Определение: $\Delta_i f := f(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_{i-1},\overset{\circ}{x}_i+\Delta x_i,\overset{\circ}{x}_{i+1},\dots,\overset{\circ}{x}_m) - f(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_{i-1},\overset{\circ}{x}_i,\overset{\circ}{x}_{i+1},\dots,\overset{\circ}{x}_m)$ - приращение вдоль координаты x_i

Определение: $f(x_1,\dots,x_m)$ непрерывна по координате x_i, если $\Delta_i f\to 0$ при $\Delta x_i\to 0$

Лемма: Если $f(x_1,\dots,x_m)$ непр. в $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_m)$, то она непрерывна в этой точке по каждой координате (Это непосредственное следствие определения непрерывности и разностной формы).

Примечание: Обратное неверно! Непрерывность по каждой координате $\neg\implies$ непрерывность в точке $\left(f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x^2+y^2=0\end{cases} \text{т.к. предел в точке не сущуствеует}\right)$

Для непрерывнфх функций имеют место теоремы:

- об арифметических операциях с функциями
- О сохранении знака непрерывной функции:
  $f(M)\leqslant 0 \quad (M\in\Omega(M_0))$. Тогда $\exists\Omega_1(M_0)\subseteq\Omega(M_0),\forall M\in\Omega_1 : f(M)\leqslant 0$
- О прохождении функции через любое промежуточное значение (на связном мн-ве $\mathcal{D}$):
  $M_1,M_2\in\mathcal{D}, u_1 := f(M_1), u_2 := f(M_2) \quad \forall u_0\in[u_1,u_2]$ на $\forall$ кривой, соед. M_1,M_2, $\exists A : f(A)=u_0$
  Доказательство: $\mathcal{D}$ - связное, кривая $x_1=\varphi_1(t),\dots,x_m=\varphi_m(t)$, где $\varphi_i(t)$ непр. $\forall i\in\overline{1,m}, t\in[t_1,t_2]$
  $u_1 = M_1(\varphi_1(t_1),\dots,\varphi_m(t_1)), u_2 =$ [аналогично]. $f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t))$ - непрерывна, тогда $\exists t_a\in[t_1,t_2]$: $f(\varphi_1(t_a),\dots,\varphi_m(t_a)) = u_0$ по теореме для одномерного случая.
- Непрерывность сложной функции: есть m функций k переменных: $x_1=\varphi_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_m=\varphi_m(t_1,\dots,t_k)$, Они определены в $\Omega(A)$, непрерывны в $A(a_1,\dots,a_k)$. Пусть $u=f(M)=f(x_1,\dots,x_m)$ определены в $\Omega(B)$ $[B(\varphi_1(A),\dots,\varphi_m(A))]$ и непрерывны в B. Тогда $F(t_1,\dots,t_k) = f(\varphi_1(t_1,\dots,t_k),\dots,\varphi_2$ непрерывны в точке A.

  Доказательство: $f(x,y), x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$
  По условию $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0,\forall(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta : |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.
  По условию $\forall\delta>0\exists\gamma,\forall(u,v)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\gamma$:
  $$|x-x_0| = |\varphi(u,v)-\varphi(u_0,v_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \wedge |y-y_0| = |\psi(u,v)-\psi(u_0,v_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$
  Тогда $\rho((x,y),(x_0,y_0))<\delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)| = |f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) - f(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))| < \varepsilon$
  Запишем определение из того, что написано выше:

$$\forall\varepsilon>0\exists\gamma,\forall u,v\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}:|f(\varphi(u,v),\psi(u,v))-f(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))|<\varepsilon$$

Что является определением непрерывности сложной функции

Лекция 4 (2025-02-25)

Теорема Больцано-Вейерштрасса: Из любой ограниченной $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{M_{K_n}\}$

$ 4. (продолжение)

Функция $f(M)$ **ограниченна** на $\mathbb{M}$, если $\exists R,\forall M\in\mathbb{M}:|f(M)|<R$

Первая теорема Вейерштрасса: непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена.

Док-во: т.к. $f(M)$ непрерывна, то по Гейне $\forall A\in\mathbb{M},\forall\{M_n\}\to A$,

$\forall n\ (M_n\neq A)\wedge(M_n\in\{M\}):\{f(M_n)\}\to f(A)$

Предположим, что $f(M)$ - неограничена. $\forall n\in\mathbb{N}\exists M_n\in\mathbb{M}:|f(M_n)|>n$

Составим последовательность $\{M_n\}\subset\mathbb{M}\subset K_R(0)\implies\{M_n\}$ ограничена

Можно выделить $\{M_{k_n}\}\to A\in\mathbb{M}$ (т.к. замкнутое множество)

Тогда $\{f(M)\}\to f(A)$ - это противоречит $\forall n_k f(M_{n_k})>n_k\geq n$

Пример: $u=\begin{cases}\dfrac{y+1}{x-1},x^2+y^2=1,x\neq1\\0,x=1,y=0\end{cases}$ не ограничена на множестве $x^2+y^2=1$

Рассмотрим $M(x=1+\underbrace{\Delta x}_{<0},y=\underbrace{\sqrt{1-(1+\Delta x)^2)}}_{=0+\Delta y}$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{0+\Delta y+1}{1+\Delta x-1}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{-\Delta x^2-2\Delta x}+1}{\Delta x}\overset{[1/\Delta x\to\infty]}{=}\infty$$

Определение: $\mathcal{U}$ - точная верхняя грань функции $u=f(M)$ на $\mathbb{M}$, если $\begin{cases}\forall M\in\mathbb{M}:f(M)\leq\mathcal{U}\\\forall\varepsilon>0\exists\tilde{M}\in\mathbb{M}:f(\tilde{M})\geq\mathcal{U}_\varepsilon\end{cases}$

Вторая теорема Вейерштрасса: непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает своих точной верхней и нижней грани

Доказательство: аналогично для функции 1 переменной

Равномерная непрерывность: $f(M)$ определена в области $\mathcal{D}$,

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0,\forall M',M''\in\mathcal{D},\rho(M',M'')<\delta:|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$

Пример 1: $u=f(x,y)=x+y,(x,y)\in\mathbb{R}^2$; докажем, что u - равномерно непрерывная

докажем Р.Н.: $M'(x',y');M''(x'',y''):\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta$;

Берём $\forall\varepsilon,\delta=\dfrac{\varepsilon}{69}:|f(M')-f(M'')|=|x'-x''+y'-y''|\leq|x'-x''|+|y'-y''|<\dfrac{\varepsilon}{69}<\varepsilon$

Пример 2: $u=\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2},0<x^2+y^2\leq1$; Докажем, что $u(x,y)$ НЕ равномерно непрерывная на $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0<x^2+y^2\leq1\right\}$.

доказать: $\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists M',M''\in\mathcal{D},\rho(M',M'')<\delta:|f(M')-f(M")|>\varepsilon$.

выберем $M'(\delta,\delta);M"(\delta,\dfrac{\delta}{2});\rho=\dfrac{\delta}{2}$. Тогда $|f(M')-f(M")|=\left|\dfrac{\sqrt{2}\delta^2}{2\delta^2}-\dfrac{\delta^2\sqrt{1+\frac{1}{16}}}{\delta^2\cdot\frac{5}{4}}\right|=\dfrac{\sqrt{17}}{5}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1}{10}=\varepsilon$

Теорема Кантора: непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывная на нём.

Доказывается так же, как в случае для 1 переменной

$ 5: Дифференцируемость ФНП

Пусть $f(M)$ задана в области $\mathcal{D}$

Определение: Полное приращение $u = f(M)$ в точке $M(x_1, \dots, x_m)$

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m) \forall M'(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$$

Частное приращение: $\underbrace{\Delta_i u = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}_{\text{приращение функции 1 переменной } x_i}$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta x_i u}{\Delta x_i}$, то он называется **частной производной** функции $u = f(M)$ по переменной x_i. Обозначается: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}; u'_{x_i}; f'_{x_i}$

[Чтобы вычислить частную производную по аргументу x_i, надо все остальные аргументы считать константами (параметрами) и вычислять производную как у функции одной переменной x_i]

Пример: $u = x^y; \begin{cases} u'_x = yx^{y-1} \\ u'_y = \ln(x)x^y \end{cases}$

Пусть $f(M)$ определена в области $\mathcal{D}$

Определение: Дифференцируемая $u = f(M)$ в точке M, если полное приращение в M можно представить, как

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)\Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)\Delta x_m, \text{ где}$$
$$\lim_{\Delta x_1, \dots \Delta x_m \to 0} \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = 0$$

Второе определение: $\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \bar{o}(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (\Delta x_i)^2}$

Лемма: Определения равносильны

доказательство: 1 $\implies$ 2: Докажем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i(\dots)\Delta x_i = \bar{o}(\rho) : \lim\limits_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0} \dfrac{\sum_i \alpha_i \cdot \Delta x_i}{\rho} =$

$= \left[\left| \dfrac{\Delta x_i}{\rho} \right| \leq 1 - \text{ограничена} \right] 0$

2 $\implies$ 1: Обозначим $\bar{o}(\rho) = h(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$.

$$\bar{o}(\rho) = h = \frac{h}{\rho}\frac{\rho^2}{\rho} = \frac{h}{\rho}\frac{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}{\rho} = \underbrace{\frac{h}{\rho}\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{=\alpha_1(\dots)} \Delta x_1 + \underbrace{\dots}_{\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}} + \underbrace{\frac{h}{\rho}\frac{\Delta x_m}{\rho}}_{\alpha_m(\dots)} \Delta x_m$$

$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \alpha_1(\dots) = 0$ Т.к. $h = o(\rho)$. Доопределяя $\alpha(0, \dots, 0) = 0$, доказано

Теорема о необходимом условии дифференцируемости: Если $u = f(M)$ дифф-ма в M, то у неё $\exists$ частные производные по каждому аргументу в этой точке

Доказательство: Дано: $\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \bar{o}(\rho)$.

Пусть $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \dots = \Delta x_m = 0, \Delta x_i \neq 0$. Тогда $\Delta u = A_i \Delta x_i + \bar{o}(|\Delta x_i|) =$
$= f(\dots, x_i + \Delta x_i, \dots) - f(\dots) = \Delta_i u$

$$u'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{A_i \Delta x_i + o(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} = A_i$$

Следствие 1. $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

Следствие 2. Если $\nexists$ частная производная по хотя бы 1 аргументу, тогда f не дифференцируема

Пример: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; исследуем на дифференцируемость в $(0, 0)$

[замечание: можно вычислить u'_x, u'_y в $\mathring{\Omega}(0, 0)$, но нельзя в $(0, 0)$]

По определению: $u_x = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0, x, y = 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \dots = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \Delta x > 0 \\ -1, \Delta x < 0 \end{cases}$, Предел не существует (левый и правый пределы не равны), Поэтому u не дифференцируема в $(0, 0)$

Лекция 5 (2025-03-04)

Теорема: Достаточное условие дифференцируемости функции
Пусть $u = f(M)$ опр. в $\Omega(M_0)$. Докажем для $M(x, y), M_0(x_0, y_0)$ (2-мерный случай)
Пусть $\exists u'_x(M), u'_y(M), M \in \Omega_1(M_0)$, они же непрерывны в M_0, тогда $u = f(M)$ дифф-ма В точке M_0

Доказательство: Рассмотрим $\Delta u(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(M) - f(M') + f(M') - f(M_0)$
$f(M) - f(M') = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$ - считаем приращением функции x,где $y_0 + \Delta y$ - параметр. По теореме о формуле Лагранжа $[[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x, \theta \in [0, 1]]]$
$f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x. f'_x$ непр. в $M_0 \implies \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0)$
По "очень важной лемме": $f'_x(x + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y),$ где $\alpha \to 0$
Окончательно: $f(M) - f(M') = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x$
Рассмотрим $f(M') - f(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(X_0, y_0) \overset{\text{лагранж}}{=} f'_y(x_0, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y \overset{\text{оч важ лемм}}{=}$
$= f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta y$

Тогда: $\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$

Пример 1: $u(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, доопред. $u(0, 0) = 0$

$u'_x(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u(0, 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x} = 0; \quad u'_y(0, 0) = 0$
В окресности $\overset{\circ}{\Omega}(0, 0)$ работает таблица производных: $u'_x = 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
В полярных координатах: $\lim\limits_{\rho \to 0, \varphi \in [0, 2\pi]} \left(2\rho\cos\varphi\sin\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{\rho\cos\varphi}{\rho}\cos\dfrac{1}{\rho}\right) \nexists$, значит, разрывна - достаточное условие не выполнено

Проверим по определению: $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \dfrac{u(\Delta x, \Delta y) - 0 - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$, значит, дифференцируема

Пример 2: $\begin{cases} 1, xy \neq 0 \\ 0, xy = 0 \end{cases}$ Разрывна $\implies$ недифференцируема
$u'_x(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = 0 = u'_y(0, 0)$
$u'_x(0, y_0 \neq 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(\Delta x, y_0) - u(0, 0)}{\Delta x} \nexists$
$u'_x, u'_y(x_0 \neq 0, y_0 \neq 0) = 0$ (по работающей таблице производных)
Получилось, что u'_x, u'_y непрерывны в области определения

Теорема о дифф. сложной функции: Пусть $x\varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ дифф в $(u_0, v_0), \ x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$, пусть $f(x, y)$ дифф в точке (x_0, y_0), тогда $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифф.
Док-во: $\begin{cases} \Delta x(u_0, v_0) = \varphi'_u(u_0, v_0)\Delta u + \varphi'_v(u_0, v_0)\Delta v + \alpha_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \alpha_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v \\ \Delta y(u_0, v_0) = \psi'_u(u_0, v_0)\Delta u + \psi'_v(u_0, v_0)\Delta v + \beta_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \beta_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 - \text{БМ} \\ \beta_1, \beta_2 - \text{БМ} \end{cases}$
$\Delta z(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\underbrace{\Delta x}_{*} + f'_y(x_0, y_0)\underbrace{\Delta y}_{*} + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$

Подставим $*: \Delta z(x_0, y_0) =$
$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_u(u_0, v_0)\Delta u + f'_y(x_0, y_0)\psi'_u(u_0, v_0)\Delta u + f'_x(x_0, y_0)\varphi'_v(u_0, v_0)\Delta v + f'_y(x_0, y_0)\psi'_v(u_0, v_0)\Delta v +$
$f'_x(x_0, y_0)\alpha_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + f'_y(x_0, y_0)\beta'_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\varphi'_u(u_0, v_0)\Delta u + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\alpha_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u +$
$\gamma_2(\Delta x, \Delta y)\psi'_u(u_0, v_0)\Delta u + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\beta_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + f'_x(x_0, y_0)\alpha_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v + f'_y(x_0, y_0)\beta'_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v +$
$\gamma_1(\Delta x, \Delta y)\varphi'_v(u_0, v_0)\Delta v + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\alpha_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\psi'_v(u_0, v_0)\Delta v + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\beta_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v$
Т.к. $\Delta u, \Delta v \to 0 : \Delta x, \Delta y \to 0, \gamma_{1,2} \to 0$, все функции дифференцируемы $\implies$ непрерывны $\implies$ ограничены: $F(u, v) = z(\varphi(u, v), \psi(u, v));$ $\begin{cases} F'_u(u_0, v_0) = f'_x\varphi'_u(u_0, v_0) + f'_y\psi'_u(u_0, v_0) \\ F'_v(u_0, v_0) = f'_x\varphi'_v(u_0, v_0) + f'_y\psi'_v(u_0, v_0) \end{cases}$

Общая формула: $f(\varphi_1(t_1, \dots), \dots) : \dfrac{\partial f}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}$

Лекция 6 (2025-03-06)

Напомним теорему о производной сложной функции ФНП: $F = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).F'_u = f'_x \varphi'_u + f'_y \psi'_u$

Дифференциал ФНП

Пусть $u = f(M)$ определена в $\Omega(M_0), M_0(\circ x_1, \dots, \circ x_m), M(\circ x_1 + \Delta x_1, \dots, \circ x_m + \Delta x_m)$.
Если u дифференцируема в $M_0 \overset{def}{\iff} \Delta u = u(M) - u(M_0) = \underbrace{A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m}_{\text{дифференциал}} + o(\rho(M, M_0))$

Дифференциал (первый) - линейная часть приращения функции

Будем использовать обозначения $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, dx_i \equiv \Delta x_i$

Дифференциал обозначается *так*: $du|_{M_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) dx_m$ Дифференциал является линейной функцией m переменных $\partial x_i, i = \overline{1, m}$

Инвариантность формы первого дифференциала:
На примере, рассмотрим функцию $F = \underbrace{f(\varphi(u, v), \psi(u, v))}_{dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv, dy = \psi'_u du + \psi'_v dv}$:

$dF = F_u du + F_v dv = (f'_x \varphi'_u + f'_y \psi'_u) du + (f'_x \varphi'_v + f'_y \psi'_v) dv = f'_x(\varphi'_u du + \varphi'_v dv) + f'_y(\psi'_u du + \psi'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy$

Свойство инвариантности формулы первого дифференциала состоит в том, что мы можем записать функцию сложной переменной через dx, dy, через du, dv, и это будет одно и то же

Теоремы об арифметических операциях дифференцируемых функций

Пусть $f(M), g(M)$ определены и дифференцируемы в $\Omega(M_0)$. тогда:
$f(M) \underset{*}{\pm} g(M)$ дифференцируемы, и если $\dfrac{1}{g(M)}$ дифференцируема, то $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ тоже дифференцируема

$ 6. Геометрический смысл дифференцируемости

Теорема о касательной плоскости

S - поверхность, π - плоскость $\exists N_0(x_0, y_0, z_S(x_0, y_0)) \in S \cap \pi, N_1 \in \pi, NN_1 \perp \pi$

Плоскость π называется касательной плоскостью к поверхности S, если $\lim\limits_{N \to N_0, N \in S} \dfrac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0$

Достаточное условие $\exists$ касательной плоскости

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то у поверхности $z_S = f(x, y) \exists$ касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, которая имеет уравнение $z - f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$

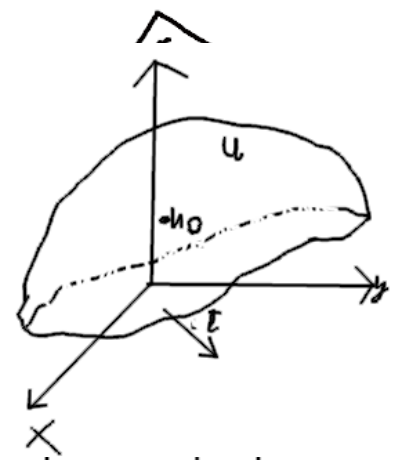
Доказательство: $u(M) - u(M_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{=\Delta x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{=\Delta y} + o(\rho) =$

$$= u(M) - \left\{ \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}_{z_\pi(M)} \right\} = o(\rho)$$

$z_S(M) - z_\pi(M_0) = o(\rho(M, M_0)) = NN_0 \qquad N_0N > M_0M;$

$NN_1 < NN_2 = MM_0; \lim\limits_{N \to N_0} \dfrac{NN_1}{NN_0} = \left[0 < \dfrac{NN_1}{NN_0} = \dfrac{\rho(N, N_1)}{\rho(N_1, N_0)} < \dfrac{o(\rho(M_0, M))}{\rho(M_0, M)} \to 0 (N \to N_0, M \to M_0) \right] =$
$= 0$

Производная по направлению и градиент



Производная по направлению $\vec{l}$: $\lim\limits_{M \to M_0 \in L} \dfrac{u(M) - u(M_0)}{M_0M}, M_0M =$
$\begin{cases} |M_0M|, M_0M \upuparrows \vec{l} \\ -|M_0M|, M_0M \upuparrows -\vec{l} \end{cases}$

Обозначается: $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$

Рассмотрим: $M(x, y), M_0(x_0, y_0), u(M) = f \begin{pmatrix} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{pmatrix} =$
$\varphi(t) \implies \dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$

Пример: $u = \sqrt[3]{x^2y}, l = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}, \dfrac{\partial u}{\partial l}(0, 0) = ?$

Лекция 7 (2025-03-11)

Теоремы об арифметических операциях

Если $u = f(M), h = f(M)$ опр. $\in \Omega(M) \wedge$ дифф. в M, тогда $u \pm v, uv$ дифф. и верны равенства:
$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(uv) = udv + vdu$

Если $v \neq 0 \in \Omega(M) : d\dfrac{u}{v} = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Доказательство 1:

$$\Delta u(M) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + \bar{o}(\rho); \quad \Delta v = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i}\Delta x_i + \bar{o}(\rho)$$

$\Delta u + \Delta v = \displaystyle\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \Delta x_i = f(x_1 + \Delta x_1, \dots) + g(x_1 + \Delta x_1, \dots) - f(\dots) - g(\dots) = \Delta(u + v) =$
$\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial(u + v)}{\partial x_i}\Delta x_i + \bar{o}(\rho)$ - значит, дифференцируемая. Пользуясь линейностью оператора дифференцировани по 1 переменной, разбиваем на 2 суммы: $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i}\Delta x_i + \bar{o}(\rho) = du + dv$

Докажем 2 и 3: $w := u(\dots)v(\dots)$ - сложная функция, дифференцируемая в $(u(M), v(M))$. По теореме о дифференцировании сложной функции и свойству инвариантности 1 дифференциала:
$d(uv) = vdu + vdu; \quad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = ud\left(\dfrac{1}{v}\right) + \dfrac{1}{v}du = \dfrac{udv - vdu}{v^2}$

Продолжаем параграф 6. Градиент.

Рассмотрим $u = f(M)$, дифф. в M_0. На прямой L с направлением $\vec{l}\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha)}{t} = \frac{\partial f}{\partial t}_{t=0} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$$

Введём **Градиент**: $u(M_0) = \left\{f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right\} = \nabla u(M_0) \implies \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(\nabla u(M_0)\cdot\vec{l}\right)$, где l - **ЕДИНИЧНЫЙ** вектор, а u **ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА** в точке

Замечание 1: формула верня для любого $\mathbb{R}^m, m\in\mathbb{N}$.

Замечание 2: направление градиента совпадает с направлением *максимальной скорости роста* функции. На этом основаны алгоритмы gradient descent.

Пример 1: $u = x^2+y^2+z^2 \quad L=\{1,1,1\} \quad M_0(1,2,3) \quad \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) =?$

$\nabla u = \{2x, 2y, 2z\}\,; \quad l = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}; \quad \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+4+6) = 4\sqrt{3}$

Пример 2: поле точечного заряда в точке $M_0(\vec{r}_0); \quad u = l\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}; \quad E = -\nabla u$

$|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) =$

$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z\right.$

$ 7. Производные и дифференциалы высшиъ порядков.

Пусть u дифф. в $\Omega(M), \exists u'_{x_i}(M)$. если u'_{x_i} дифф. в M, то $\frac{\partial u'_x}{\partial x_k}$ - вторая частная производная u по $x_i, x_k : \frac{d^2u}{dx_i dx_k}$. Если $i\neq k$, то производная смешанная

Сейчас мы записываем примеры, но я этих примеров уже столько нарешался в первом семестре, что тошно...

Пример 2: $u = \begin{cases} -xy, |y|>|x| \\ xy, |y|\leq|x| \end{cases}$ - разрывна на прямых $y=\pm x$

$u'_x : y, -y, y, -y, u'_y : x, -x, x, -x$ в разных местах относ. прямых разрыва

$u'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = 0 = u'_y$

$\lim_{x,y\to 0} u'_x = 0 = \lim_{x,y\to 0} u'_y$ - выполнено достаточное условие дифференцируемости в $(0,0)$ посчитаем вторые частные производные: $\begin{cases} u''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u'_x(0,\Delta y)-u'_x(0,0)}{\Delta y} = -1 \\ u''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u'_x(\Delta x,0)-u'_x(0,0)}{\Delta y} = 1 \end{cases}$

Во хуетаааа... :000

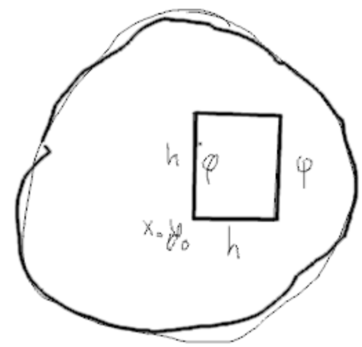
Лекция 8 (2025-03-18)

Tue Mar 18 10:51:08 MSK 2025

\$7. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теорема: Пусть $u = f(x, y)$ имеет частные производные $f_{xy}", f_{yx}"$ в $\Omega(M_0)$ и непрерывны в M_0, тогда $f_{xy}"(M_0) = f_{yx}"(M_0)$

Доказательство: составим $F(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0)$. Введём $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$. Тогда $F(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$. Введём $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Тогда $F(h) = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$. φ, ψ дифференцируемы по условию, функции одной переменной, по теореме Лагранжа:



$$\begin{cases} F(h) & =\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi_x'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h = \\ & =f_x'(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h)h - f_x'(x_0 + \theta_1 h, y_0)h = \\ & =f_{xy}"(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h)h^2 = (f_{xy}"(x_0, y_0) + \alpha_1(h))h^2 \quad (h \to 0) \\ F(h) & =f_{yx}"(x_0, y_0)h^2 + \alpha_2(h)h^2 \end{cases}$$

$\implies f_{xy}"(x_0, y_0) + \alpha_1(h) = f_{yx}"(x_0, y_0) + \alpha_2(h) \overset{h\to 0}{\implies}$
$\implies f_{xy}"(x_0, y_0) = f_{yx}"(x_0, y_0)$

Определение: Функция называется дважды дифференцируемой, если она дифф. в окресности M_0 и все её первые ЧП дифф. в точке

Теорема: если функция дважды дифференцируема в точке, то её смешанные вторые частные производные в этой точке равны

Доказательство: используя переход по Лагранжу в прошлом доказательстве: $F(h) = \underbrace{(f_x'(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_x'(x_0 + \theta_1 h, y_0))}_{\Delta f_x} h$

$$\begin{cases} \Delta f_x' = f_{xx}"(M_0) \underbrace{\Delta x}_{=0} + f_{xy}"(M_0) \underbrace{\Delta y}_{=h} + \bar{o}(h) \\ \Delta f_y' = f_{yx}"(M_0) \underbrace{\Delta x}_{=h} + f_{yy}"(M_0) \underbrace{\Delta y}_{=0} + \bar{o}(h) \end{cases} \implies F(h) = (f_{xy}" \cdot h + \bar{o}(h))\, h = (f_{yx}" \cdot h + \bar{o}(h))\, h \overset{h\to 0}{\implies}$$

$\implies f_{xy}(M_0) = f_{yx}(M_0)$

Определение: n раз дифф. в точке M_0, если она $n-1$ раз дифф-ма в окресности M_0 и все её частные производные $n-1$-ого порядка дифференцируемы в точке M_0

Теорема: Если $u = f(M)$ n раз дифференцируема в точке M_0, то все её смешанные частные производные до n-ого порядка не зависят от порядка дифференцирования

Дифференциалы высших поряков

Пусть $u = f(M)$ дважды дифференуируема в $M(x, y) \implies du = f_x'(M)dx = d_y'(M)dy$

1. Считаем, что dx, dy - фиксированные константы
2. Считаем, что $du(x, y)$ - функция переменных x, y
3. Вычислим $d^2 u = d(du)$, считая, что dx, dy не меняются

$$d^2 u = d(f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy) = (f_{xx}"\delta x + f_{yy}"\delta y)dx + (f_{xy}"\delta x + f_{yx}"\delta y)dy \overset{\delta x = dx}{=} f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + d_{yy}dy^2$$

Определение: Оператор - правило, по которому каждой функции из некоторого множества ставится в соответсвие другая функция (из того же или другого множества)

Операторы: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} : u \to u_x' \\ \dfrac{\partial}{\partial y} : u \to u_y' \end{cases}$ $\begin{cases} d = \dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy \\ d^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + 2\dfrac{d^2}{dxdy}dxdy \end{cases}$

По индукции верно: $\partial^n = \left(\sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^n = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n$

Второй дифференциал сложной функции: $f(x(t_1, \dots, t_k), y(t_1, \dots, t_k))$
$df = f'_x dx + d'_y dy, dx = \dfrac{\partial x}{\partial t_i} dt^i, dy = \dfrac{\partial y}{\partial t_i} dt^i$ (обозначания Энштейна для ЛК)
$d^2 f = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x)dx + f'_x d^2 x + d(f'_y)dy + f'_y d^2 y = f_{xx}"dx^2 + 2f_{xy}"dxdy + f_{yy}"dy^2 + f'_x d^2 x + f'_y d^2 y$
- это свойство **не инвариантности** формулы второго дифференциала

Заметим, что если $x = \alpha^i t_i, y = \beta^i t_i$, то формула дифференциала всё-таки сохраняется для любого порядка (т.к. $d^n x = d^n y = 0$)

Формула тейлора для ФНП

Пусть $u = f(M)$ n раз дифференцируема в окресности $\Omega(M_0)$, тогда $\exists N \in \Omega(M_0)$:
$u(M) = u(M_0) + du(M_0) + \dfrac{1}{2!} d^2 u(M_0) + \dots + \dfrac{1}{n!} d^n u(M_0) + \dfrac{1}{n+1}! d^{n+1} u(N)$

Доказательство: Уравнение отрезка MM_0 : $\begin{cases} x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \underbrace{(\overset{m}{x}_1 - \overset{\circ}{x}_1)}_{\Delta x_1} t \\ \vdots \\ x_n = \overset{\circ}{x}_n + \underbrace{(\overset{m}{x}_n - \overset{\circ}{x}_n)}_{\Delta x_n} t \end{cases}$

$u(M) = f(\overset{\circ}{x}_1 + (\overset{m}{x}_1 - \overset{\circ}{x}_1)t, \dots, \overset{\circ}{x}_n + (\overset{m}{x}_n - \overset{\circ}{x}_n)t)$, и применяя формулу для одномерного случая получаем формулу тейлора: $F(1) = F(0) + dF(0) + \dots, \quad F(1) = u(M) \quad F(0) = u(M_0)$
$dF(0) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0} \Delta x^i = df(M_0) \quad d^2 F(0) = \left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_{M_0} \Delta x^i \right)^2 = d^2 u(M_0)$

Лекция 9 (2025-03-20)

Thu Mar 20 10:51:19 MSK 2025

Многочлен тейлора: $P_n(M) = u(M_0) + du|_{M_0} + \dfrac{1}{2} d^2 u|_{M_0} + \dots + \dfrac{1}{n!} d^n u|_{M_0}$

Свойства остатка в разложении тейлора:

1. $P_n(M)$ - многочлен n-ого порядка от M
2. Все производные $P_n(M)$ вплоть до порядка n в точке M_0 совпадают с производными u в M_0

напомним **определение**: $u = f(M)$ n раз дифференцируема в $M_0 \Longleftarrow$ дифференцируема в $\Omega(M_0)$ и все её частные производные $n-1$-ого порядка дифференцируемы в M_0

Теоремы о формуле тейлора:

1. Конечные приращения: 1 раз дифф-ма в M_0 (опр. в $\Omega(M_0)$) $\implies u(M) - u(M_0) = du(N)$
2. Остаточный член Пеано: $f(M)$ n раз дифференцируема в M_0. Тогда для $M \in \Omega(M_0)$ верно $u(M) = P_n(M_0) + \bar{o}(\rho(M, M_0))$

   Доказательство: По индукции. Если $n = 1$, $u = f(x, y)$ дифф-ма в M_0, то её приращание $u(x, y) - u(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + \bar{o}(\rho)$

   Для $n = 2$: $R_3(M) = u(M) - P_2(M) \implies R_3(M) - R_3(M_0) = \dfrac{\partial R_3}{\partial x}(N)\Delta x + \dfrac{\partial R_3}{\partial y}(N)\Delta y$, это выражение дифференцируемо 2 раза, поэтому $\dfrac{\partial R_3}{\partial x}(n) = \underbrace{P_1^{R_3}(M_0)}_{=0} + \bar{o}(\rho(N, M_0)) = \bar{o}(\rho(M, M_0)) \implies$

$R_3(M) = \bar{o}(\rho)\Delta x + \bar{o}(\rho)\Delta y = \bar{o}(\rho^2)$

Лекция 10 (2025-03-25)

Tue Mar 25 10:51:27 MSK 2025

$9. Локальный экстремум ФНП

Пусть $u = f(M)$ определена в области $\mathcal{D}, \overset{\circ}{M}(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) \in \mathcal{D}$

Локальный минимум: $\exists \Omega(M_0) \in \mathcal{D}, \forall M \in \overset{\circ}{\Omega}(()M_0) : f(M) > f(M_0)$

Локальный максимум: Аналогично

Локальный экстремум: Либо минимум, либо максимум

Необходимое условие $\exists$ локального экстремума: Если M_0 - точка локального экстремума $f(M)$ и $\exists\ \frac{\partial u}{\partial x_k}\ (M_0)$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$

Доказательство: Дано, что $\exists \Omega(M_0), \forall M \in \overset{\circ}{\Omega}(M_0) \, [f(M) > f(M_0) \vee f(M) < f(M_0)]$. Это верно для точек M_k, на множестве точек $\{M_k\}$ рассмотрим функцию 1 переменной $\varphi(x_k) = f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, x_k, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$. Т.к. $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = \varphi'(\overset{\circ}{x}_k)$, и выполняется $\{f(M_k) < f(M_0) \vee f(M_k) > f(M_0)\} \iff$
$\iff \left\{\varphi(x_k) < \varphi(\overset{\circ}{x}_k) \vee \varphi(x_k) > \varphi(\overset{\circ}{x}_k)\right\} \implies \overset{\circ}{x}_k$ - локальный экстремум $\varphi(x_k)$, а $\left(\exists \varphi'(\overset{\circ}{x}_k) = 0\right) \implies$
$\implies \left(\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0\right)$

Следствие: M_0 - локальный экстремум дифференцируемой функции $u = f(M)$, то её полный дифференциал равен нулю.

Пример 1: $u = x^2 + y^2; (0, 0)$ - точка локального минимума, $\begin{cases} u'_x(0,0) = 2x = 0 \\ u'_y(0,0) = 2y = 0 \end{cases}$

Пример 2: $u = xy$ - гиперболический парабабабабаабабабабабабаб $\begin{cases} u'_x(0,0) = u'_y(0,0) = 0 \\ u_x(x > 0, y > 0) > 0 \\ u_x(x > 0, y < 0) < 0 \\ u_x(x < 0, y < 0) > 0 \\ u_x(x < 0, y > 0) < 0 \end{cases}$ - нет такой окресности точки $(0, 0)$, в которой $u(0, 0)$ было бы максимальным или минимальным значением, то есть экстремума нет (но производные равны нулю!)

Квадратичная форма: $Q(X_1, \ldots, X_m) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i y_i$

Определённость квадратичной формулы:

1. Положительно определённая: $Q(x_1, \ldots, x_m) > 0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$
2. Отрицательно определённая: $\forall (x_1, \ldots, x_m) \neq (0, \ldots, 0) : Q(x_1, \ldots, x_m) < 0$
3. Знакоопределённая: Либо положительно, либо отрицательно определённая
4. Квазизнакоопределённая: знакоопределённая с нестрогим неравенством $\wedge \exists (x_1, \ldots, x_m) \neq (0, \ldots, 0) : Q(x_1, \ldots, x_m) = 0$. Пример: $x^2 - 2xy + y^2$

5. Знакопеременная: всё остальное ($\exists X' := (x'_1, \dots, x'_n), X" := (x_1", \dots, x_n"); \quad X', X" \neq (0, \dots, 0):$ sgn $Q(X') \neq$ sgn $Q(X"))$

Критерий Сильвестера: матрица квадроберской формы $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$. Составим угловые миноры: $\delta 1 = \begin{vmatrix} a_1^1 \end{vmatrix}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}, \delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \dots, \delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$.

- $\forall i : \delta_i > 0$: положительно определённая
- $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_{2n-1} < 0, \delta_{2n} > 0, \quad n \in \mathbb{N}$: отрицательно определённая
- $\exists i : \delta_i = 0$: критерий не раобтает
- Иначе: форма знакопеременная

пример: $x^2 + y^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$
$xy : \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} : \delta_1 = 0$
$x^2 - 2xy + y^2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0$

Достаточное условие локального экстремума: рассмотрим квадратичную функцию аргументов $dx_i, i = \overline{1, m} : d^2u(M_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j$. Если d^2u положительно определённая, то M_0 - точка локального минимума, если d^2u отрицательно определённая, то M_0 - точка локального максимума, иначе надо доп. исследование

Доказательство:
Пусть d^2u положительно определённая, $> k > 0, \forall dx_i \neq 0$
Рассмотрим $\overset{\circ}{\Omega}(M_0) : f(M) - f(M_0) = du(M_0) + \frac{1}{2}d^2(M_0) + \bar{o}(\rho^2) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_j^i dx_i dx_j + o(\rho^2) =$ (по Тейлору)

$$= \left[M_0(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m), M(\overset{\circ}{x}_1 + dx_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m + dx_m) \implies \rho^2 = \sum_i dx_i^2 \right] =$$

$= \frac{\rho^2}{2} \left(\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_i^j \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + o(1) \right), \quad h_i := \frac{dx_i}{\rho}, \sum\limits_i h_i^2 = 1$, рассмотрим $Q(h_1, \dots, h_m)$. Q непрерывна на сфере, достигает точной нижней грани $k > 0$

$f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} \left(\underbrace{Q(h_1, \dots, h_m)}_{\geq k} + \alpha(\rho) \right), \alpha \to 0 \implies \exists \rho_0 > 0 : 0 < \rho < \rho_0, \rho \to 0 : |\alpha(\rho)| < \frac{k}{2}$. Для точек $M \in \overset{\circ}{\Omega}_{\rho_0}(M_0) : f(M) - f(M_0) > \frac{\rho^2}{2} \left(k - \frac{k}{2} \right) = \frac{\rho^2 k}{4} \implies \exists \overset{\circ}{\Omega}_{\rho_0}(M_0) : \forall M \in \Omega f(M) > f(M_0) \implies M_0$ - лок. минимум

Лекция 11 (2025-04-01)

Tue Apr 1 10:53:15 MSK 2025

Глава 3. Нихуявные функции

рассмотрим уравнение $y^2 = x^2$. оно задаёт

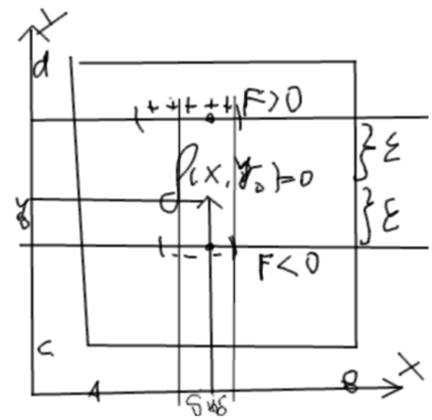
- 2 дифференцируемые функции $y = \pm x$
- 4 непрерывные функции $y = \pm x, \quad y = \pm|x|$
- ∞ разрывных функций

Определение: Пусть дано уравнение $F(x, y) = 0$. Пусть $\forall x \in \mathbb{X}$ однозначно определяется y. Тогда говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = f(x)$ на множестве $\mathbb{X}$

Вопрос: условие существования, единственности и дифференцируемости неявной функции.

Глобальная теорема о существовании, единственности и непрерывности функции: Пусть $F(x, y)$
- определена, непрерывна в прямоугольнике $Q = \{(x, y) : a < x < d \wedge c \leq y \leq d\}$
- $\forall x \in (a, b)$ строгомонотонна как функция y на отрезке $[c, d]$
- $F(x, c) \cdot F(x, d) < 0 \forall x \in (a, b)$
Тогда $\in Q\exists!\ y = f(x)$ непрерывную и неявную

Замечание: условия теоремы требуют $\exists F(x, y)$ на концах для y, но не для x



Доказательство: т.к. $\forall x \in [a, b]\ F(x, y)$ является функцией одного аргумента y, а ещё строго монотонна и непрерывна, имеет значения разных знаков на концах интервала $y : [c, d]$, поэтому $\forall x \exists! y_0 \in [c, d] : F(x, y_0) = 0$, то есть $F(x, y_0) = 0$ задаёт единственную функцию $y = f(x)$ при $x \in [a, b]a$

Докажем непрерывность в $\forall x_0 \in [a, b] : \forall; \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Пусть $f(x, y)$ монотонно возрастает. Т.к. $F(x_0, y_0) = 0$, непрерывна и монотонно возрастает по y, то при $y = y_0 + \varepsilon \implies F(x_0, f(x_0) + \varepsilon) >$, аналогично для $y = y_0 - \varepsilon : F(\dots) < 0$

Теперь рассмотрим 2 функции переменной $x : F(x, f(x_0) \pm \varepsilon)$, одна > 0, другая < 0 при $x = x_0$, $\exists \Omega_\delta(x_0)$, в которой эти функции сохраняют знак и при этом $\forall x \in \Omega_\delta(x_0) : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies f(x)$ непрерывна в точке x_0

локальная теорема: Пусть $F(x, y)$
- определена и непрерывна в $\Omega(M_0),\ M_0(x_0, y_0)$
- в этой окресности $\exists F'_y$ и непрерывна
- $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$
Тогдадададададада $\exists$ rect $Q\ \{(x, y) : |x - x_0| < c \wedge |y - y_0| \leq d \wedge c, d > 0\} \in \Omega(M_0)$, в котором $F(x, y) = 0$ задаёт ! функцию $y = f(x)$, непрерывную на интервале $x \in (x_0 - c, x_0 + c)$

Доказательство: сами на листочках на лекции, поэтому тут нет

Бля, а оно чёт сложное какое-то...))))) Я такую поеботину на листочке написал, что просто пиздец

теорема о дифференцируемости неявной функции: Пусть $F(x, y)$: <Такие же условия, как в локальной теореме> + дифференцируема в M_0. Тогда $\exists Q\ \{(x, y) : |x - x_0| < c \wedge |y - y_0| \leq d \wedge c, d > 0\} \subseteq \Omega(M_0)$, в котором $F(x, y) = 0$ задаёт неявную $y = f(x)$, дифференцируемую в x_0

Доказательство: $y = f(x)$ в x_0. По услови. $F(x, y)$ дифференцируема в M_0. Зададим приращение $\Delta x, \Delta y,\ x_0 - c < x + \Delta x < x_0 + c,\ \Delta y = f(x_0) + \Delta x - f(x_0)$ (задание приращения Δy таким образом - важно!!!). Рассмотрим $\Delta F(M_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \alpha(\Delta x, \Delta y)_{1,2} \to 0 \implies \alpha(\Delta x, \Delta f)_{1,2} \to 0$

$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta x + \alpha_1(\dots)\Delta x + \alpha_2(\dots)\Delta y = 0 = F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \alpha_1(\dots) + \alpha_2(\dots)\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \implies \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1(\dots)}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2(\dots)}$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Вывод: нихуя не понял, перед сессией буду читать конспект и плакать, но... Я не выспался. Мне можно. Конец лекции. А негры хорошие ребята. И мать ваша тоже хорошая женщина. И вы огромный молодец. Возьмите с полки пирожок, протрите на нём пыль и положите на место.

Лекция 12 (2025-04-15)

Tue Apr 15 10:51:22 MSK 2025

условный экстремум

Постановка задачи на условны: определить точки жкстремума функции $u(\dots)$ при условии связи:
$$\begin{cases} F_1(\dots) = 0 \\ \vdots \\ F_n(\dots) = 0 \end{cases}$$
Если $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$ - точка условного экстремума, то в точке M_0 выполняется (УС) [условие связи].

1. пусть F_i' дифференцируема в $\Omega(M_0)$
2. $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ непрерывны в $M_0 \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,m})$
3. $\left.\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$ (D - якобианы)

Тогда задача об условном экстремуме u сводится к задаче о локальном экстремуме $g(x_{n+1}, \dots, x_m) = u(\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_m)$.

Если $\varphi_i(x_{n+1}, x_m)$ не выражается в явном виде, то можно применить *метод Лагранжа*:

Составим функцию лагранжа $\Phi(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = u(x_1, \dots, x_m) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x_1, \dots, x_m)$. Если M_0 - условный экстремум, то $F_i(M_0) = 0; \Phi = u(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$

Зададим необходимые и достаточные условия условного экстремума:

- **Необходимое условие**: Пусть $u(x_1, \dots, x_m)$ пусть выполнены условия (1)-(3), пусть u дифф. в $\Omega(M_0)$, пусть M_0 - условный экстремум, тогда можно подобрать такие значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \lambda_1, \dots) = 0 \quad i = \overline{1,m}$ (т.е. нужно решить систему уравнений с условиями связи + Лагранж).

  Доказательство: Запишем Φ двумя способами:

  1. $d\Phi(\dots) = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{dx_i = d\varphi_i} + \underbrace{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{x_i \text{ - независимые}} + \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} d\lambda_i}_{=F_i=0}$
  2. $d\Phi(\dots) = du(M_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i dF_i(M_0) + \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i(M_0) d\lambda_i}_{=0}$

  Из этого следует: $\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{dx_i = d\varphi_i} + \underbrace{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{x_i \text{ - независимые}} = d\Phi(\dots) = du(M_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i dF_i(M_0) \implies d\Phi =$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0}dx_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}dx_k}_{\text{зависимые, } dx_i=d\varphi_i, dx_k=d\varphi_k;\quad =\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i(????)}\quad+\underbrace{\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i}_{x_i-\text{независимые}}.$$ Для того, чтобы все частные производные $\Phi=0$, надо $\begin{cases}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dots+\lambda_n\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\right)\\ \vdots\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dots+\lambda_n\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\right)\end{cases}$. Так как якобиан системы $\neq 0$, она разрешима, поэтому ВЫВОД:

Чтобы определить точки возможного услового экстремума, надо решить систему уравнений $\underset{i=\overline{1,m}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m,\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0}; \underset{j=\overline{1,n}}{F_j(x_1,\dots,x_m)=0}$

- **достаточное условие** (следствие теоремы о достаточном условии локального экстремума для функции $g(x_{n+1},\dots,x_m)$. $d^2g=\sum_{i,j=n+1}^{m}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j$ - входят только независимые переменные) Но у нас нет g, у нас только Φ, только хардкор: $d\Phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}d\varphi_i+\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i+\sum_{i=1}^{n}F_i(M_0)d\lambda_i$, в сумме сначала зависимые, потом независимые, потм считаем λ_i независимыми.
$g=u(\varphi_1(x_{1+n},\dots,x_m),\varphi_2(\dots),\dots,\varphi_n(\dots),x_{n+1},\dots,x_m);\quad dg(M_0)=d\Phi(M_0), M$ удовл. (УС);
$g(M)\equiv\Phi(M);\quad d^2g(M)=d^2\Phi(M)$; найдём
$d^2\Phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}d\varphi_id\varphi_j+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}d^2\varphi_i}_{=0}+\sum_{i=n+1}^{m}\sum j=1^m\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}dF_id\lambda_i}_{=0}\implies$

$$d^2\Phi(\mathbf{M_0},\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_m,\lambda_1,\dots,\lambda_m)\cdot\begin{cases}dx_idx_j & ,i,j=\overline{n+1,m}\\ dx_i\sum k=1^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k & ,\begin{cases}i=\overline{n+1,m}\\ j=\overline{1,n}\end{cases}\\ dx_j\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k & ,\begin{cases}i=\overline{1,m}\\ j=\overline{n+1,m}\end{cases}\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}dx_k\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}dx_l & ,i,j=\overline{1,n}\end{cases}$$

БЛЯЯЯЯЯЯТЬ Я ТАК НЕ МОГУУУУУУ

Не, это пиздец. Я Нихуяяяяяяя не понял... вообще нихуя...

Лекция 13 (2025-04-17)

Глава IV. Двойной интеграл

$1. Площаддь плоской фигуры

Определение: Плоской фигурой $\mathcal{G}$ называется любое множество точек плоскости
понятия, известные со школы:

- Многоугольник $\mathcal{Q}$

- площадь многоугольника $P(\mathcal{Q})$
- $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2 \implies P(\mathcal{Q}_1) < P(\mathcal{Q}_2)$

ОБОЗНАЧЕНИЯ: $\mathcal{Q}_a-$ описанный многоугольник, $\mathcal{Q}_b$ - вписанный, $\mathcal{G}$ - фигура

будем говорить, что многоугольник $\mathcal{Q}_a$ описан вокруг фигуры $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}_a$. При этом если $\mathcal{Q}_b \subset \mathcal{G}$ то $\mathcal{Q}_b$ называется вписанным в фигуру $\mathcal{G}$ (замечание: вписать многоугольник можно не во всякую фигуру).

множество площадей $\{P(\mathcal{Q})\}$ ограничено снизу нулём. При этом, если в фигуру $\mathcal{G}$ можно вписать многоугольники, тогда $\{P(\mathcal{Q}_b)\}$ ограничено сверху $P(\mathcal{Q}_a)$

определение: $\exists \inf\{P(\mathcal{Q}_a)\} := \bar{P}$ - верхняя площадь фигуры $\mathcal{G}$. Так же $\exists \sup\{P(\mathcal{Q}_b)\} := \underline{P}$ - нижняя площадь. Примечание: если в $\mathcal{G}$ нельзя вписать прямоугольник, то $\underline{P} := 0$

утверждение: $\bar{P} \geq \underline{P}$.

Доказательство:

$\bar{P} = \{P(\mathcal{Q}_a)\} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) : \bar{P} \leq \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) < \bar{P} + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad (1)$

$\underline{P} = \sup\{P(\mathcal{Q}_b)\} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) : \underline{P} - \dfrac{\varepsilon}{2} < \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) \leq \underline{P} \quad (2)$

Предположим, что $\underline{P} > \bar{P} \implies \exists \varepsilon > 0 : \underline{P} - \bar{P} > \varepsilon > 0$.

Из $(2) - (1) : \underline{P} - \bar{P} - \varepsilon < \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) - \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) < \underline{P} - \bar{P} \implies \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) > \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) > 0$ - противоречие

следствие: $\forall P(\mathcal{Q}_b) \leq \underline{P} \leq \bar{P} \leq P(\mathcal{Q}_a)$

определение: плоская фигура называется *квадрируемой*, если $\bar{P} = \underline{P}$. При этом $\bar{P} = \underline{P} = P(\mathcal{G})$ называется **площадью** фигуры $\mathcal{G}$

Теорема: необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b : P(\mathcal{Q}_a) - P(\mathcal{Q}_b) < \varepsilon$. Доказательство:

- Необходимость: $\bar{P} = \underline{P}; \quad \underline{P} = \sup\{P(\mathcal{Q}_b)\} : -\underline{P} + \dfrac{\varepsilon}{2} > -P(\mathcal{Q}_b) \geq -\underline{P}; \quad \bar{P} = \inf\{P(\mathcal{Q}_a)\} : \bar{P} \leq P(\mathcal{Q}_a) < \bar{P} + \dfrac{\varepsilon}{2} \implies 0 = \bar{P} - \underline{P} \leq P(\mathcal{Q}_a) - P(\mathcal{Q}_b) < \varepsilon$
- Достаточность доказали на листочках

\$2. Площадь криволинейной трапеции

Вспомним нижние и верхние суммы Дарбу: $f(x) > 0; m_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x), dk; sad; as; ld\bar{s} := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i;$

$M_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \underline{S} := \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i d$

Лемма дарбу: $\exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \bar{s} = \underline{I}; \exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{S} = \bar{I}$

Необх. и дост. условие интегрируемости: $\bar{I} = \underline{I} = I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

лемма: для криволинейной трапеции $\underline{P} = \underline{I} = I; \bar{P} = \bar{I} = I \implies$ криволинейная трапеция квадрируема $\implies$ есть площад

пример неквадроберской фигуры: $|x| + |y| \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}$. $\bar{P} = 2 \neq \underline{P} = 0$

\$3. Двойной интеграл

Рассмотрим квадриаруемое множество $\mathcal{G}$. Разделим его на непересекающиеся куски $\mathcal{G}_i$ прямыми, параллельны осям ox, oy. при этом $\cup_i \mathcal{G}_i = \mathcal{G}$. Пусть $f(M)$ определена для $M \in \mathcal{G}$. Составим Сумма $I(M_i, \mathcal{G}_i) = \sum\limits_i f(\xi_i, \eta_i) P(\mathcal{G}_i)$. $\mathcal{G}$ квадрируема и ограничена $\implies$ $\mathcal{G}_i$ ограничены и квадрируемы.

$\forall i \exists \sup \rho(M_i^1, M_i^2), M_i^1, M_i^2 \in \mathcal{G}_i . d_i := \sup \rho(M_i^1, M_i^2)$ называется диаметром $\mathcal{G}_i; \quad d := \max_i d_i$ называется диаметром разбиения. если $\exists \lim I(M_i, \mathcal{G}_i)$, то то называется двойным интегралом $f(x, y)$ по $\mathcal{G}$

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

asdhjasld jhaksdh kja shdka hsdjakhd ajldf aljd asldf jsldfgjksdhjk hdjklfjkdsgksdfh gksdfkgh dfkjgh kjdfh gkjdf hgkjdfh gkjdfh gkjdfh kgjdf ghdfjkg sdfl sjdfkl jsdfk jsdfk jlsdfhsdjg sdhkg sdfkghsdfkghksdfh gksdfh g hdsfkg hs dfhg ksdfh gklsdhfkghsd fkg