

Содержание

Изоморфизм линейных пространств	8
свойства изоморфизма	9
Вопрос существования изоморфизма	9
СЛАУ (системы линейный алгебраических уравнений)	9
Ранг матрицы	9
способы задания СЛУ	10
Теорема Кронекера-Капелли	11
Теорема Фредгольма (очень важная!)	11
продолжаем ОСЛУ	11
алгоритм построения ФСР	12
Ковекторы	13
Basis transition	14
Basis coordinates transistion	15
Linear operator	15
kernel and image	15
Матрица линейного оператора	16
Как меняется матрица оператора при переходе к новому базису?	16
Множество линейных операторов	16
собственные векторы; собственные значения	17
задачи на собственные векторы и значения	17
задача на собственный вектор/собственное значение, пример	18
Билинейные формы	20
(Анти)симметричные билинейные формы	20
Ранг матрицы, инварианты билинейных форм	21
Квадратичные формы	21
я пропустил несколько лекций по болезни	21
евклидовы пространства	21
унитарное пространство	21
ортogonalность	23
Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	24
сопряжённый оператор	24

Лекция 1 (2025-02-11)

Определители

Определитель n -ого порядка

Щас будем рассматривать определитель:

Полилинейность: <пропустил кусок лекции>

Кососимметричность: $f(x, y) = -f(y, x)$

Пример: $f(x, y) = x - y$

$f(x, y, z) = -f(x, z, y)$

Определитель: $A = K^{n \times n}; = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \|A_1 \dots A_n\|$

$\det A = |A_1, A_2, \dots, A_n|$ Обладает 3 свойствами:

1. Полилинейности:

$$|\alpha^1 A_1^1 + \alpha^2 A_1^2, A_2, \dots, A_n| = \alpha_1 |A_1^1, \dots, A_n| + \alpha_2 |A_1^2, \dots, A_n|$$

2. Кососимметричности:

$$|A_1, A_2, \dots, A_n| = -|A_2, A_1, \dots, A_n|$$

3. Нормировки $\det I = 1$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \|e_1, e_2, \dots, e_n\|, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Свойство базисности: столбцы $e_1, \dots, e_n$ являются базисом в пр-ве столбцов

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ЛК}$$

Определитель как функция столбцов $A : \det A = |A_1, \dots, A_n|$

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} e_{\sigma_1}, \dots, A_n = \sum_{\sigma_n=1}^n a_n^{\sigma_n} e_{\sigma_n}$$

$$\det A = \left| \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} e_{\sigma_1}, \dots, A_n \right| = \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} |e_{\sigma_1}, A_2, \dots, A_n| = \sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_n=1}^n a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n} |e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots, e_{\sigma_n}|$$

По кососимметричности $|e_1, e_1, \dots, e_{n-1}| = -|e_1, e_1, \dots, e_{n-1}| = 0$, т.е. если хотя бы 2 инд. совпадают, опр. равен нулю

$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \forall (i \neq j \Rightarrow \sigma_i \neq \sigma_j) : |e_{\sigma_1}, \dots| \neq 0$, поэтому σ - перестановки, их $n!$

По нормировке: $|e_1, \dots, e_n| = 1 \xrightarrow{\text{По нормировке}} |e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_n}| = \pm 1$

[Перестановки образуют группу, но у нас на это нет времени...]

Введём чётность перестановки: чётная (нечётная) перестановка получается чётным (нечётным) количеством транспозиций, знак перестановки: $\text{sgn } \sigma = (-1)^{(\text{кол-во перестановок})}$

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot a_1^{\sigma_1} \dots a_n^{\sigma_n}$$

Системы Крамера

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + \dots + a_n^n x^n = b^n \end{cases} \Rightarrow x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = B$$

$$A := \|A_1, \dots, A_n\|, \Delta = \det A \neq 0, \Delta_1 = |B, A_2, \dots, A_n|, \dots, \Delta_n = |A_1, \dots, A_{n-1}, B|$$
$$\Delta_1 = |x^1 A_1 + \dots + x^n A_n, A_2, \dots, A_n| = x^1 |A_1, \dots, A_n| + x^2 \underbrace{|A_2, A_2, \dots, A_n| + \dots}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ Аналогично } x^k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

Свойства определителя n -ого порядка

1. $\det A = \det A^T$

2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Доказательство: $C := A \cdot B = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\| \left\| B_1, \dots, B_n \right\| = \begin{pmatrix} A^1 B_1 & \dots & A^1 B_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n B_1 & \dots & A^n B_n \end{pmatrix}$

$$C_k = \begin{pmatrix} A^1 B_k \\ \vdots \\ A^n B_k \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n \begin{pmatrix} a_s^1 b_k^s \\ \vdots \\ a_s^n b_k^s \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_k^s A_s, \text{ т.е. } K\text{-ый столбец } (A \cdot B) \text{ - ЛК столбцов } A, \text{ с коэфф-}$$

ами из k -ой строки b

$$\det C = |C_1, \dots, C_n| = \left| \sum_{s_1=1}^n b_1^{s_1} A_{s_1}, \dots \right| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_1^{\sigma_1} \dots b_n^{\sigma_n} \det A = \det A \cdot \det B$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

4. Определитель треугольной матрицы: т.к. $a_k^j = 0, k > j$: перестановка $\neq 0!$: $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ - то есть в единственном случае, который соответствует диагонали

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i^i$$

Лекция 2 (2025-02-13)

Лекция 2

Докажем, что $\det A = 0 \iff$ столбцы ЛЗ

Достаточность: $A = \|A_1, \dots, A_n\|, \exists (\alpha^1, \alpha^2, \dots) \neq (0, 0, \dots) : \alpha^1 A_1 + \dots + \alpha^n A_n = 0 \Rightarrow \beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$,

Пусть $\alpha_1 \neq 0$: $A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \dots$

$$\det A = |A_1, A_2, \dots| = |\beta^2 A_2 + \dots, A_2, \dots| = [\text{по полилинейности}] = 0$$

Разложение по столбцу/строке

Пусть $A \in K^{n \times n}, \det A = |A_1, A_2, \dots, A_n|, A_j = \sum_{k=1}^n a_j^k e_k$,

$$\det A = |A_1, A_2, \dots, A - n| = |A_1, \dots, a_j^k e_k, \dots, A_n| = a_j^k A_j^k, \text{ где}$$

$A_j^k = |A_1, \dots, A_{j-1}, e_k, A_{j+1}, A_n|$, перестановками приводим к виду, где первый столбец - это $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, таким

образом получаем, что знак $(-1)^{k+j}$, т.е. можно записать

$$\det A = \sum_k a_j^k A_j^k \stackrel{A_j^k = (-1)^{k+j} M_j^k}{=} \sum_k (-1)^{k+j} a_j^k M_j^k - \text{это разложение по } j\text{-ому столбцу}$$

$$\det A = \det A^T = (a^T)_j^k (A^T)_j^k \stackrel{(a^T)_j^k = a_k^j}{=} \sum_j a_j^k A_j^k - \text{разложение по } j\text{-ой строчке}$$

Фальшивое разложение определителя

$$\det A = |A_1, \dots, A_n| = |A - 1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n|$$

$$\text{Рассмотрим } |A - 1, \dots, A_{j-1}, A_P, A_{j+1}, \dots, A_n|, P \in \overline{1, n}, P \neq j \implies \det A^P = 0$$

$$\text{Разложим по базису: } A^P = \sum_{k=1}^n |A_1, \dots, A_{j-1}, e_k, A_{j+1}, \dots, A_n| = a_P^k A_j^k \implies \det \sum_k a_P^k A_j^k = \det A \cdot \delta_{kp}$$

Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}; A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbf{I}$$

Необходимое условие существования: $\det A \neq 0$: легко выводится из определителя произведения

$$\begin{aligned} \text{Достаточное условие: } A^T &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}; \text{adj } A = A^\vee = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}; A \cdot A^\vee = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \cdot \|A^{\vee^1}, A^{\vee^2}, \dots\| = \\ &= \begin{pmatrix} A^1 A^{\vee^1} & \dots & A^1 A^{\vee^n} \\ \vdots & & \vdots \\ A^n A^{\vee^1} & \dots & A^n A^{\vee^n} \end{pmatrix} = \text{по фальшивому разложению} = \text{diag } \det A = \det A \cdot \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда получаем, что обратная матрица } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\vee$$

Теорема о базисном миноре

У нас буквой M обозначается ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ минор. Рассмотрим обычный:

$$\text{Минор матрицы: } A \in \mathbb{K}^{n \times m} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \|A_1, \dots, A_n\|, r \in [1, \min\{m, n\}]$$

Выберем r строк и столбцов, не меняя порядок,

$$\left[A^{j_1}, \dots, A^{j_m}, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m \right. \\ \left. A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \right], \text{ и составим матрицу из пересечения выбранных строчек и столбцов,}$$

и определитель этой матрицы называется минор: $= M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$

Базисный минор: Минор порядка r базисный, если он $\neq 0$, а любой минор $r+1$ порядка, если $\exists, = 0$

Не существует минора нулевой матрицы

$$\text{Попробуем найти базисный минор: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{берём } M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Можно найти базисный минор по схеме Гаусса-Жордана

Строчки и столбцы, на пересечении которых находится базисный минор, называются базисными

САМА ТЕОРЕМА (о базисном миноре):

1. Базисные столбцы ЛН
2. Любой столбец матрицы есть ЛК базисных (то же со строками)

Другими словами: Базисные столбцы образуют базис в линейной оболочке столбцов матрицы
Доказательство: для простоты базисный минор $\exists$ - первые r строк и столбцов

$M \neq 0 \implies \{A_1^{1:r}, \dots, A_r^{1:r}\}$ ЛН, при этом полные столбцы $\{A_1, \dots, A_r\}$ тоже ЛН (мы можем пойти от обратного: предположить, что ЛЗ, составить ЛК = 0 по определению, стереть часть столбцов и получить противоречие)

Если $A_j : j \in \overline{1, r}$: то выражается как лк $\alpha = 0, \dots, 1_j, \dots, 0$

Иначе, рассмотрим столбцы $A_1, \dots, A_r, A_j$, строки $A^1, \dots, A^r, A^s$ $s \in \overline{1, m}$ -ую строку, и рассмотрим полученный минор: Если $s \in \overline{1, r}$, то $M = 0$ (есть ЛЗ строки), иначе $M = 0$ т.к. минор $r + 1$, и он всегда равен 0 (по условию базисного минора), тогда все строки и столбцы ЛЗ, тогда $\exists$ ЛК столбцов, переносим A_j вправо, получаем $A_j = \text{ЛК}\{A_1, \dots, A_r\}$ ■

Лекция 3 (2025-02-18)

Линейное пространство

Пусть $\forall a, b \in \mathcal{L}$:

$$a + b \in \mathcal{L}$$

$$\beta \cdot a \in \mathcal{L} \quad (\forall \beta \in \mathbb{K})$$

Линейное пространство: множество $\mathcal{L}$ с двумя операциями называется ЛП, если выполнены следующие св-ва этих операций:

1. Коммутативность $(a + b = b + a)$
2. Ассоциативность $(a + (b + c) = (a + b) + c)$
3. $\exists \theta, \forall a : a + \theta = a$ (сущ. нулевой элемент)
4. $\forall a \exists (-a) \in \mathcal{L} : a + (-a) = \theta$
5. $\forall a 1 \cdot a = a$
6. $\beta(\gamma \cdot a) = (\beta \cdot \gamma)a$
7. $(\beta + \gamma)a = \beta \cdot a + \gamma \cdot a$
8. $\beta(a + b) = \beta \cdot a + \beta \cdot b$

Пример: вектор на прямой V_1 , аналогично V_2, V_3

Другой пример: $P_n(\mathbb{R}) : t^0 \cdot \alpha_0 + t^1 \cdot \alpha_1 + \dots + t^n \cdot \alpha_n$

Третий пример: Матрицы! $A, B \in K^{m \times n}$

Лемма 1: Нулевой элемент единственен

Доказательство: Пусть нул. элемента два: θ_1, θ_2 :

$$\begin{cases} a + \theta_1 = a \\ a + \theta_2 = a \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \implies \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \implies \theta_1 = \theta_2$$

Лемма 2: противоположный вектор единственен.

Доказательство: Пусть $a, b, c \in \mathcal{L} : \begin{cases} a + c = \theta \\ a + b = \theta \end{cases}$

$$c = c + \theta = c + (a + b) = (c + a) + b = \theta + b = b \implies \mathbf{c = b}$$

Лемма 3: Пусть $a, b \in \mathcal{L}$ фиксированы, тогда $\exists! x : a + x = b$

Доказательство: Существование: $x = b + (-a)$ (очевидно); Единственность: $x = (x + a) + (-a) = b + (-a)$

Лемма 4: $0 \cdot a = \theta$

Доказательство: $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Рассмотрим ур-е, $\exists! x : 0 \cdot a + x = 0 \cdot a \implies x = 0 \cdot a + 0 \cdot (-a) = 0$

Лемма 5: $\alpha \cdot \theta = \theta$

Доказательство: $(*) = \alpha \cdot (\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$, далее аналогично (4).

Лемма 6: $(-a) = -1 \cdot a$

Доказательство: $1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \theta$, поэтому по единственности $-a = -1 \cdot a$

Вот они и все основные свойства

линейная (не)зависимость

$\alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_n \cdot a_n$ - ЛК

Тривиальная ЛК: $\alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

Семейство $a_1 \dots a_n$ ЛЗ, если $\exists$ нетривиальная ЛК = 0

Семейство $a_1 \dots a_n$ ЛН, $\exists$ ЛК = 0 $\iff \alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

Лемма 7: Вектор a линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен θ

Доказательство:

необходимость: $\alpha \cdot a = \theta, \alpha \neq 0 \implies a = \frac{1}{\alpha} \theta$

достаточность: $a = \theta : 1\theta = \theta \implies a$ ЛЗ

Лемма 8: Если семейство содержит θ , то оно ЛЗ

Доказательство: $\alpha \cdot \theta + 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_n = \theta$

Лемма 9: Если у семейства есть ЛЗ подсемейство, то само семейство тоже ЛЗ

Доказательство: $\Delta = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$, где $\{a_1, \dots, a_m\}$ ЛЗ. $\implies \exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$: ЛК = 0

Покажем ЛК: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m + 0 \cdot a_{m+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \theta \implies \{a_1 \dots a_n\}$ - ЛЗ

Лемма 10: Если семейство векторов $a_1 \dots a_n$ ЛН, то любое его подсемейство ЛН

Доказательство: тривиально

Лемма 11: Пусть семейство состоит из > 2 векторов. Тогда для ЛЗ Необходимо и достаточно, чтобы

Один из векторов линейно выражался через оставшиеся

Доказательство:

Необходимость: Существует ЛК = 0, пусть $\alpha_1 \neq 0 \implies a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 + \dots$ - выражается

Достаточность: пусть $a_1 = \beta_2 a_2 + \dots \implies (-1)a_1 + \beta_2 a_2 + \dots = \theta$ - ЛЗ

Лирическое отступление

Теорема о базисном миноре: $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, базисные столбцы базисного минора образуют базис

Пусть у матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} \exists$ базисный минор, построен на первых $1 \leq r \leq \min(n, m)$ строках, столбцах

Запишем $A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1^T} & \dots & A^{n^T} \end{pmatrix} \cdot (A')^T = \alpha^1 A^{1^T} + \dots \implies A' = \alpha^1 A^1 + \dots$, крч не понял я

это доказательство, но вроде понятно, что для строк теорема о базисном миноре работает.

Рассмотрим однородную, но не квадратную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + \dots + a_n^2 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = 0 \end{cases}, 1 \leq m < n \quad (!!!)$$

Лемма 12: у этой системы $\exists$ нетривиальное решение.

Доказательство: перепишем в матричной форме:
$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \begin{cases} A^1 \cdot \mathcal{X} = 0 \\ \vdots \\ A^m \cdot \mathcal{X} = 0 \end{cases}$ - если раскрыть, то это изначальная система.

если A нулевая, решение тривиально. если ненулевая, то есть базисный минор (пусть расположен удобно), тогда j -ая строка $= c_j^1 A^1 + \dots + c_r^j A^r$ (по т-ме о базисном миноре). Рассмотрим укороченную с.

$$\begin{cases} A^1 \cdot \mathcal{X} = 0 \\ \vdots \\ A^r \cdot \mathcal{X} = 0 \end{cases} \quad \text{решения полной явл. решениями укороченной.}$$

проверим обратное: $A^j \mathcal{X} = c_1^j (A^1 \mathcal{X}) + \dots + c_r^j (A^r \mathcal{X}) = c_1^j \cdot 0 + \dots = 0 \quad (j = \overline{r+1, m})$

Получается система:
$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_n^r x^n = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = -a_{r+1}^1 x^{r+1} - \dots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_r^r x^r = -a_{r+1}^r x^{r+1} - \dots - a_n^r x^n \end{cases}$$

 $(1 \leq r \leq \min \{m, n\} < n)$

$$\tilde{\mathbf{A}}_r \cdot \mathcal{X}_r = \mathbf{B}_r; \det \tilde{\mathbf{A}}_r \stackrel{\text{def}}{\neq} 0 \implies \mathcal{X}_r = (\tilde{\mathbf{A}}_r)^{-1} \cdot \mathbf{B}_r, x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^r \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Лекция 4 (2025-03-03)

Определение: Полное семейство - семейство векторов линейного пр-ва $\mathcal{L}$ называется полным, если любой вектор линейного пр-ва можно представить в виде ЛК векторов этого семейства можно представить в виде ЛК векторов этого семейства.

Примечание: в отличие от базиса оно может быть ЛЗ

Второе определение: семейство полное, если линейная оболочка семейства совпадает с линейным пространством

Базис: ЛН полное семейство

Лемма 1: разложение по базису единственно.

Доказательство: $\forall x \in \mathcal{L}, \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис. $x = \underbrace{x^i e_i}_{\text{разложение}} = \underbrace{y^i e_i}_{\text{2-е разлож.}} \implies (x^i - y^i) e_i = \theta$ - тогда ЛК

тривиальна, соотв. $x^i = y^i$

лемма 2: если семейство $\{a_1, \dots, a_m\}$ ЛН в $\mathcal{L}$, а $a_{m+1} \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$, но $a_{m+1} \in \mathcal{L}$, то семейство $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ - ЛН

Доказательство: пусть $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ - ЛЗ, т.е. $\exists \alpha^1 a_1 + \dots + \alpha^m a_m + \beta a_{m+1} = \theta$

Если $\beta = 0 : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, значит семейство ЛЗ (противоречие)

Если $\beta \neq 0 : -\frac{\alpha_1}{\beta}a_1 - \dots - \frac{\alpha_m}{\beta}a_m = a_{m+1} \implies a_{m+1} \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$ (противоречие)

напомним: конечномерное пр-во - это когда есть МАКСИМАЛЬНОЕ число ЛН векторов (максимум называется размерностью).

Теорема: в любом конечномерном протранстве $\exists$ базис

Доказательство: $\mathcal{L} \neq \{\theta\}, a_1 \neq \theta, a_1 \in \mathcal{L}$ рассмотрим $\mathcal{L}(a_1)$:

либо $\mathcal{L}(a_1) := \mathcal{L}$ (тогда базис a_1).

либо $\exists a_2 \in \mathcal{L} : a_2 \notin \mathcal{L}(a_1)$ - тогда $\{a_1, a_2\}$ ЛН. Тогда рассмотрим $\mathcal{L}(a_1, a_2)$:

Либо $\mathcal{L}(a_1, a_2) = \mathcal{L}$ - Тогда базис $\{a_1, a_2\}$

Либо $\mathcal{L}(a_1, a_2) \subset \mathcal{L}$ - повторяем шаги...

$\vdots$

В итоге получим n ЛН векторов, где n - размерность

Лемма 3: Если даны $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{L} : \begin{cases} \dim \mathcal{Q} \leq \dim \mathcal{P} \\ \dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P} \implies \mathcal{Q} = \mathcal{P} \end{cases}$

Док-во: пункт 1 очевиден, пункт 2 пойдём от противного: пусть вложение $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ строгое. Пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ - базис в $\mathcal{Q}$. Т.к. вложение строгое, $\exists g \in \mathcal{P}, g \notin \mathcal{Q}$. Тогда $\{e_1, \dots, e_m, g\}$ - ЛН (в силу леммы 2), тогда очевидно, что $\dim \mathcal{P} > \dim \mathcal{Q}$ - противоречие.

Лемма 4: $\dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{Q} + \dim \mathcal{P} - \dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$

Док-во: пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ - базис $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Справедливо, что $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \in \mathcal{P}$. Дополним бази $\{\exists_1, \dots, e_m, g_1, \dots, g_n\}$ - базис в $\mathcal{P}$, аналогично пусть $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_l\}$ - базис в $\mathcal{Q}$.

$\dim \mathcal{P} = m+n$; $\dim \mathcal{Q} = m+l$; $\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = m$. Рассмотрим семейство $\{e_1 \dots e_m, g_1 \dots g_n, f_1 \dots f_l\}$, $\dim = m+n+l$

$$\forall x \in \mathcal{Q} + \mathcal{P}, \exists x_1 \in \mathcal{P}, x_2 \in \mathcal{Q} : x = x_1 + x_2; \begin{cases} x_1 = \alpha^1 e_1 + \dots + \beta^1 g_1 + \dots \\ x_2 = \delta^1 e_1 + \dots + \gamma^1 f_1 + \dots \end{cases} \implies$$

$\implies x_1 + x_2 = (\alpha^1 + \delta^1)e^1 + \dots + \beta^1 g_1 + \dots + \gamma^1 f_1$ - значит, семейство **полное**

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \beta^1 g_1 + \dots + \gamma^1 f_1 + \dots = \theta \implies (\alpha^1 e_1 + \dots + \beta^1 g_1 + \dots) \in \mathcal{P} = (-\gamma^1 f_1 - \dots) \in \mathcal{Q} \implies$$

$$\implies \gamma^1 f_1 + \dots + \gamma^l f_l \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \implies \gamma^1 f_1 + \dots = \delta^1 e_1 + \dots \implies \delta^1 e_1 + \dots + \delta^m e_m - \gamma^1 f_1 - \dots - \gamma^l f_l = \theta,$$

но т.к. это базис в $\mathcal{Q}$ - всё нули. Аналогично для $\alpha e, \beta g$. Получаем, что всё семейство ЛН (т.к. ЛК = 0) возможно только при всех коэфф. = 0)

[я сам тут не очень понял, но.... уже 5 пара, простите]

Прямая сумма линейных подпространств: $x \in \mathcal{Q} + \mathcal{P} \subset \mathcal{L} : \exists! x_1 \in \mathcal{P}, x_2 \in \mathcal{Q} : x = x_1 + x_2$ (единственность разложения)

(Если пересечение двух подпространств нетривиальна $[\neq \emptyset]$, то сумма не будет прямой)

Теорема 2: чтобы $\exists \mathcal{Q}, \mathcal{P} : \mathcal{L} = \mathcal{Q} + \mathcal{P} \iff \begin{cases} \mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \emptyset \\ \dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{Q} + \dim \mathcal{P} \end{cases}$

Необходимость: Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{P} + \mathcal{Q} : \implies \dim \mathcal{L} = \dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} \implies \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$

Достаточность: из первого пункта $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ - прямая сумма, лежит в $\mathcal{L}$ (как сумма подпр-в), $\dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} - 0 = \dim \mathcal{L} \implies \mathcal{L} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$

Изоморфизм линейных пространств

Пусть имеется $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$. $\varphi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, где φ - взаимнооднозначное линейное отображение. Тогда φ называется **Изоморфизмом**

Линейность: $\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2)$

Однозначность: $(\forall x \in \mathcal{L}_1 \exists! y \in \mathcal{L}_2 : \varphi(x) = y) \wedge \underbrace{(\forall y \in \mathcal{L}_2 \exists! x \in \mathcal{L}_1 : y = \varphi(x))}_{\equiv \exists \varphi^{-1}(y)=x}$

свойства изоморфизма

Свойство 1. $\varphi(\theta_1) = \theta_2$. Док-во: $\varphi(\theta_1) = \varphi(0\theta_1) = 0\varphi(\theta_1) = \theta_2$

Свойство 2. $\varphi(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$. Док-во: взаимнооднозначность очевидна, линейность:

$\varphi_1(\varphi_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \varphi_1(\alpha_1 \varphi_2(x_1) + \alpha_2 \varphi_2(x_2)) = \dots$ - там понятно (я не успел) **Свойство 3.** φ^{-1} -

изоморфизм. взаимнооднозначность очевидна, линейность:

$$\varphi^{-1}(\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = [\exists! x_1, x_2 : y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)] = \varphi^{-1}(\beta^1 \varphi(x_1) + \beta^2 \varphi(x_2)) = \beta^1 \varphi^{-1}(\varphi(x_1)) + \beta^2 \varphi^{-1}(\varphi(x_2)) = \beta^1 \varphi^{-1}(y_1) + \beta^2 \varphi^{-1}(y_2)$$

Лекция 5 (2025-03-04)

Вопрос существования изоморфизма

Лемма 1: Если размерности линейный пр-в совпадают, то они изоморфны.

Доказательство: пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в $\mathcal{L}_1$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ - базис в $\mathcal{L}_2$

$$\varphi_E : \mathcal{L}_1 \rightarrow K^{n \times 1} \quad x \in \mathcal{L}_1, x = x^i e_i = E \cdot X_e = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \varphi_E(x) = X_e, \varphi_E \cdot x \rightarrow X_e$$

Покажем однозначность: $x = EX_e = EY_e, E(X_e - Y_e) = \theta \implies (x^i - y^i)e_i = \theta, x^i = y^i \implies X_e = Y_e$

Получилось, что φ_E - взаимнооднозначное отображение. Теперь линейность:

$$x_3 = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = EX_{e3} = \alpha^1 EX_{e1} + \alpha^2 EX_{e2} \implies E(\underbrace{\alpha^1 x_{e1} + \alpha^2 x_{e2}}_0 = X_{e3}) = \theta,$$

$$X_{e3} = \alpha^1 X_{e1} + \alpha^2 X_{e2}; \varphi(x_3) = \varphi(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = X_{e3} = \alpha^1 X_{e1} + \alpha^2 X_{e2} = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2)$$

Тогда φ_E - изоморфизм. Аналогично введём φ_F

$$\text{Имеем: } \varphi_E : \mathcal{L}_1 \rightarrow K^{n \times 1}, \varphi_F : \mathcal{L}_2 \rightarrow K^{n \times 1}, \varphi_F^{-1} : K^{n \times 1} \rightarrow \mathcal{L}_2; \quad \varphi = \varphi_F^{-1} \circ \varphi_E : \mathcal{L}_1 \rightarrow K^{n \times 1} \rightarrow \mathcal{L}_2$$

Лемма 2: Если $\dim \mathcal{L}_1 \neq \dim \mathcal{L}_2$, то они не изоморфны

доказательство: Пусть между ними $\exists \varphi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, m = \dim \mathcal{L}_1 > \dim \mathcal{L}_2 = n$.

Введём базис $\{e_1, \dots, e_m\} : \mathcal{L}_1; \{f_1, \dots, f_n\} : \mathcal{L}_2$

$\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)\} \subset \mathcal{L}_2 = L(\underbrace{f_1, \dots, f_n}_n)$, из какой-то теоремы $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)\}$ - ЛЗ.

$$\alpha^1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha^m \varphi(e_m) = \theta_2 \implies \varphi(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m) = \theta_2 \implies \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m = \varphi^{-1}(\theta_2) = \theta_1 - \text{отсюда противоречие: базис линейно зависим.}$$

СЛАУ (системы линейный алгебраических уравнений)

Ранг матрицы

$$A^{m \times n} = \|A_1, \dots, A_n\| = \left\| \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \right\| \quad \text{Определение: } \text{rg } A = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$$

Предположим, что $A \neq 0$, базисные столбцы A - первые r

1. $A_1, \dots, A_r$ - ЛН

2. $A_j = \alpha^i A_i, i \in \overline{1, r}, j \in \overline{1, n}$

Докажем, что $A_1, \dots, A_r$ - Базис в $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$.

$$B \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \beta^1 A_1 + \dots + \beta^n A_n = \beta^1 A_1 + \dots + \beta^r A_r + \beta^{r+1} A_{r+1} + \dots + \beta^n A_n = \beta^1 A_1 + \dots + \beta^r A_r + (\gamma^{11} A_{11} + \dots + \gamma^{r1} A_{r1}) + \dots$$

То есть $A_1, \dots, A_r$ - Базис в ЛО пространства столбцов

Лемма 3: $\dim \mathcal{L}(A^1, \dots, A^m) = r$

Доказательство: $A \in m \times n = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$, пусть базисный минор на первых r строках.

$A^T = \begin{pmatrix} A^{1^T} & \dots & A^{m^T} \end{pmatrix}$, до A^{r^T} - базисные столбцы, $\dim \mathcal{L}(A^{1^T}, \dots, A^{m^T}) = r$
 $L(A^{1^T}, \dots, A^{m^T}) \stackrel{\text{очевидно}}{=} L(A^1, \dots, A^m) = r$

способы задания СЛУ

$$1. \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

$$2. A \times X = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

$$3. x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = B \quad \text{или} \quad x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_1^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

$$4. A^1 X = b^1, \dots, A^m X = b^m \quad A_j = (a_1^j \dots a_n^j), X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Совместная система - есть хотя бы 1 решение, **не совместная** - нет решений

Однородная: $B = 0$, **Неоднородная:** $B \neq 0$

$$AX = B, A \in \mathbb{K}^{n \times n}, x, B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$$

Если $\det A \neq 0$, то система называется **крамеровской**

Теорема 1. Крамеровская система: $\exists!$ решение

$$\text{Рассмотрим: } \dim \mathbb{K}^{n \times 1} = n : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots - \text{Базис с } n \text{ векторов.}$$

Так же произвольные n ЛН столбцов образуют базис (т.к. если добавить один любой столбец к семейству, оно станет ЛЗ, т.е. $\exists$ нетрив. ЛК = 0)

$$-\frac{\alpha^1}{\beta} A_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\beta} A_n = A_{n+1} \implies \{A_1, \dots, A_n\} - \text{базис (А если } \beta = 0, \text{ то противоречие: } A_1, \dots, A_n \text{ ЛЗ)}$$

Докажем теорему о крамеровской системе:

1. $A_1, \dots, A_n$ - ЛН (т.к. $\det A \neq 0$), поэтому они образуют базис: $\forall B \in \mathbb{K}^{n \times 1} \exists! x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K} :$

$x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = B$. Получается, что $x^1, \dots, x^n$ - ЕДИНСТВЕННОЕ (из единственности разложения по базису) решение.

Рассмотрим $AX = 0, A \in \mathbb{K}^{m \times n}, X \in \mathbb{K}^{n \times 1}, 0 \in \mathbb{K}^{m \times 1}$. Пусть X_1, X_2 - решения. возьмем ЛК: $X_3 = \alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2 \implies A \cdot X_3 = A(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 (AX_1) + \alpha^2 (AX_2) = 0 + 0 = 0$, то есть

Вывод: ЛК любых 2 решений образует новое решение (ОСЛУ)

Введём множество: $K^{n \times 1} \supset \mathcal{N}_i := \{X \in \mathbb{K}^{n \times 1} | AX = 0\}$, таким образом $\mathcal{N}$ - линейное (под)пространство, и тогда там есть БАЗИС - ФСР (фундаментальное семейство решений)

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема: $AX = B$ совместна $\iff \text{rg } A = \text{rg } A:B$, где $A:B = \|A_1, \dots, A_n, B\|$

Доказательство:

1. Докажем: $AX = B$ совместна $\iff \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B)$:

Необходимость: Пусть система имеет решение: $B = x^1 A_1 + \dots + x^n A_n \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \implies$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B) \subseteq L(A_1, \dots, A_n) \\ \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B) \supseteq L(A_1, \dots, A_n) \end{cases} \implies \text{они равны}$$

Достаточность: $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \implies B \in L(A_1, \dots, A_n) \implies B = x^1 A_1 + \dots + x^n A_n$ - решение

2. Докажем, что

$$L(A_1, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_n, B) \iff \dim L_A = \dim L_{A:B} \iff \text{rg } A = \text{rg } A:B$$

Доказано.

Теорема Фредгольма (очень важная!)

Рассмотрим квадратную СЛУ $AX = B$

Первая теорема: Если однородное уравнение имеет (тривиальное) решение, но неоднородное уравнение разрешимо для $\forall B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$

Доказательство: $x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = 0$ - единственное решение $\implies$ ЛЗ $\implies$ образуют базис в $\mathbb{K}^{n \times 1}$, поэтому $\forall B \in \mathbb{K}^{n \times 1} \exists! x^1, \dots, x^n : B = x^1 A_1 + \dots + x^n A_n$

Вторая теорема: Если однородное уравнение $AX = 0$ имеет > 1 решений, то $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times 1} : AX = B$ несовместна.

Доказательство: $x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = 0$ - имеет нетривиальные решения $\implies$ ЛЗ.

Рассмотрим $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n \times 1}) \implies \exists B \in \mathbb{K}^{n \times 1} \notin \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \implies$

$\implies \nexists x^1, \dots, x^n : x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = B$, то есть нет решений $AX = B$

Лекция 6 (2025-03-11)

продолжаем ОСЛУ

множество решений $AX = 0$ образует линейное подпространство пространства столбцов

попробуем найти базис:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = 0 \end{cases}, m, n \in \mathbb{M} \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

случай $A = 0 \implies \mathcal{N} = \mathbb{K}^{n \times 1}, \dim \mathcal{N} = n$

случай $A \neq 0$: пусть $A^1, \dots, A^r$ - базисные строки

$$A = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^r \\ A^{r+1} \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|, A^j = c_1^j A^1 + \dots + c_r^j A^r; j = \overline{r+1, m}, \quad (a_1^1 \dots a_n^1) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0 \implies$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^1 X = 0 \\ \vdots \\ A^j X = 0 \quad (*) \\ \vdots \\ A^m X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^1 X = 0 \\ \vdots \\ A^r X = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Вывод: если X решение $(*)$, то оно же решение $(**)$

Проверим обратное: $A^j X = c_1^j A^1 X + \dots + c_r^j A^r X = 0$

Вывод: если X решение $(**)$, то оно же решение $(*)$

Тогда эти две системы **эквивалентны**. Выпишем укороченную систему:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_n^r x^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = -a_{r+1}^1 x^{r+1} - \dots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_r^r x^r = -a_{r+1}^r x^{r+1} - \dots - a_n^r x^n \end{cases} \Rightarrow \tilde{A}_r \tilde{X}_r = \tilde{B}_r,$$

$$\tilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{pmatrix}, \tilde{X}_r = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix}, \tilde{B}_r = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1}^r & \dots & a_n^r \end{pmatrix}, \det \tilde{A}_r \neq 0 \Rightarrow \text{Допустим 2 решения:}$$

$$AX_0 = AY_0 = 0, X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \tilde{A}_r \tilde{X}_{0r} = \tilde{A}_r \tilde{Y}_{0r} = \tilde{B}_r, \text{ значит решение одно (не очень}$$

понял эту часть)

алгоритм построения ФСР

$$\tilde{A}_r \tilde{X}_r = \tilde{B}_r, \tilde{B}_r = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1}^r & \dots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \text{ пусть } x^{r+1} = 1, x^{r+2} = \dots = x^n = 0 \Rightarrow \tilde{B}^{1r} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ \vdots \\ a_{r+1}^r \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Пусть } x^{r+2} = 1, \text{ остальное нули} \Rightarrow \tilde{B}_{2r} = - \begin{pmatrix} a_{r+2}^1 \\ \vdots \\ a_{r+2}^r \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ \vdots \\ x_2^r \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r}^1 \\ \vdots \\ x_{n-r}^r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Более словестное пояснение алгоритма:

1. Пусть $x^{r+1} = 1$ получаем столбец

2. Пусть $x^{r+2} = 1$

3, ..., n-r: $x^{r+i} = 1$

$$\text{Докажем ЛН: } \alpha^1 X_1 + \dots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ \vdots \\ z_0^r \\ \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \Theta \implies \alpha^1 = \dots = \alpha^{n-r} = 0$$

Докажем полноту:

$$\text{Пусть } X_0 \in \mathcal{N} : AX_0 = \Theta; \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \quad Y_0 := X_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r} = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \text{ нижние}$$

переменные совпадают $\implies X_0 = Y_0 \implies X_0 = x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r}$, то есть любое решение можно выразить через базисные столбцы. Столбцов получилось $n - r$, тогда $\dim \mathcal{N} = n - r$, где r - порядок базисного минора

Ковекторы

Определение ковектора (линейной формы/линейного функционала): функция на линейном пр-ве $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}$, обладает свойством линейности: $f(\alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^n x_n) = \alpha^1 f(x_1) + \dots + \alpha^n f(x_n)$.

Часто используется такое обозначение: $\langle f, x \rangle \equiv f(x)$

Примеры ковекторов: $\mathcal{L}$ = множество непрерывных функций на $[0, 1]$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \text{ есть свойство линейности.}$$

$$f \cdot = \int_0^1 f(x) \cdot dx \text{ (точкой обозначается место, где должна стоять другая функция, например)}$$

Пусть $\mathcal{L}$ - множество дифф. ф-ий: $\langle f, \varphi \rangle = \frac{d\varphi}{dt}(0)$. Линейность есть, ковектор - это ДЕЙСТВИЕ.

δ -функция дирака: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

$$\text{НЕВЕРНО её представляют так: } \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 \delta(x) \varphi(x) dx, \delta = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Интеграл по риману вообще тут смысла не имеет, по лебегу это тупо 0.

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пр-во. пусть $\mathcal{L}^*$ - множество всех ковекторов в $\mathcal{L}$. попробуем сделать линейное пространство:

равные ковекторы: $f = g \iff \langle f, x \rangle = \langle g, x \rangle \forall x \in \mathcal{L}$

сумма ковекторов: $h := f + g \iff \langle h, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle$, линейность h проверяется элементарно

произведение ковектора на число: $h := \alpha f$, линейность опять же очевидна

нулевой ковектор: $\langle \Theta^*, x \rangle = 0$, проверим линейность: $\langle \Theta^*, \alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^n x_n \rangle = 0 = \alpha^1 \langle \Theta^*, x_1 \rangle + \dots + \alpha^n \langle \Theta^*, x_n \rangle$

противоположный ковектор: $f' := (-1)f$, проверяем: $\langle f, x \rangle + \langle f', x \rangle = -\langle f, x \rangle + \langle f, x \rangle = 0 = \langle \Theta^*, x \rangle = \langle f' + f, x \rangle$

Аксиомы линейного пространства выполняются потому, что это банально числа: они вытекают из этих же аксиом для чисел.

Короче когда у нас голова будет более свежей, будем строить базис

Лекция 7 (2025-03-13)

My laptop has 6% power, so i'm writing this from TTY and it doesn't have russian keyboard
we're gonna be using:

$$\langle \alpha f, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle = \langle f, \alpha x \rangle, \quad f \in \mathcal{L}^*$$

Let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be a basis in $\mathcal{L} \implies \forall x \in \mathcal{L} \quad x^j e_j$;
 $\langle e^j, x \rangle := x^j, \quad j \in \overline{1, n}$.

We must prove: $\langle e^j, \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \rangle = \alpha^1 \langle e^j, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle e^j, x_2 \rangle$
 $x_1 = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = (\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)^j e_j = \alpha^1 x_1^j e_j + \alpha^2 x_2^j e_j = [(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)^j - \alpha^1 x_1^j - \alpha^2 x_2^j] \cdot e_j = 0 \implies$
 $[] = 0 \implies$

$$(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)^j = \alpha^1 x_1^j + \alpha^2 x_2^j$$

$$(\alpha^1 x_2 + \alpha^2 x_2)^j = \langle e^j, \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \rangle; \quad x_1^j = \langle e^j, x_1 \rangle; \quad x_2^j = \langle e^j, x_2 \rangle \implies \langle e^j, \alpha^1 x_2 + \alpha^2 x_2 \rangle = \alpha^1 \langle e^j, x_1 \rangle + \alpha^1 \langle e^j, x_2 \rangle$$

Lemm 1.: $\{e^1, \dots, e^n\}$ forms a basis in $\mathcal{L}^*$

Prove:

$$\text{fullness: } \langle f, x \rangle = \langle f, x^j e_j \rangle = x^j \langle f, e_j \rangle = \langle e^j, x \rangle \underbrace{\langle f, e_j \rangle}_{=\alpha}$$

$$\langle e^j, x \rangle \alpha = \langle \alpha e^j, x \rangle = \langle \langle f, e_j \rangle \cdot e^j, x \rangle \implies \forall x \in \mathcal{L} : f = \langle f, e_j \rangle e^j - \text{we can}$$

$$\text{Linear independence: } \langle e^j, e_k \rangle = [e_k = 0e_1 + \dots + 1e_k + \dots + 0e_n = \delta_k^j e_j] = \delta_{jk}$$

$$\langle \alpha_j e^j, e_k \rangle = \langle \theta^*, e_k \rangle = 0 = \alpha_j \delta_k^j = \alpha_k, k \in \overline{1, k} \implies \text{Linearly independant}$$

Kinda important example: $\{P^n\}$ - set of polynoms with power $\leq n, p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$
basis: $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ (to proove: fullness is trivial, linear independence proff goes like this: let $t = 0 \implies \alpha_0 = 0$, then differentiate n times and $\forall \alpha_i = 0$).

Taylor expansion of $p(t) \in \mathbb{P}^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} t^k$ - which is same as basis expansion!

meanwhile, Lets try to find $(P^{(*)})^*$

$$\text{The operation: } \langle id \cdot |_{t=0}, P(t) \rangle := P(0), \left\langle \frac{d}{dt} \cdot \Big|_{t=0}, p(t) \right\rangle := P'(0), \dots, \left\langle \frac{d^n}{dt^n} \Big|_{t=0}, P(t) \right\rangle := P^{(n)}(0)$$

$$\text{so, basis in covector space } (P^{(*)})^* : \left\{ id \cdot |_{t=0}, \frac{d}{dt} \cdot \Big|_{t=0}, \frac{d^2}{dt^2} \dots, \dots, \frac{d^n}{dt^n} \right\} \dots$$

Basis transition

we will mark **old basis** as $\{e_1, \dots, e_n\}$

and **new basis** is $\{e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}\}$

and the **"new new" basis**: $\{e_{1''}, \dots, e_{n''}\}$

as you could guess, the "new new new" basis would be with three ticks

$$e_{j'} = e_{j'}^i e_i \iff (e_{1'} \dots e_{n'}) = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} e_{1'}^1 & \dots & e_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1'}^n & \dots & e_{n'}^n \end{pmatrix} \iff E' = E \cdot C, \text{ where } C \text{ is transition}$$

matrix, while $\det C \neq 0$. Let's prove that:

$$\text{Let } \det C = 0. C = \|C_{1'}, \dots, C_{n'}\| \implies \exists \alpha^{i'} : \alpha^{1'} C_{1'} + \dots + \alpha^{n'} C_{n'} = 0$$

$$e_{i'} = c_{i'}^i e_i = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{i'}^1 \\ \vdots \\ c_{i'}^n \end{pmatrix} = EC_{i'}, e_{i'} = EC_{i'}$$

$$\alpha^{1'} \cdot e_{1'}; E \alpha^{1'} \cdot C_{i'} = E0 = 0, \text{ that means that basis } e' \text{ is linearly dependant } \implies \det C \neq 0$$

$$e_{i'} = c_{i'}^i e_i \iff E' = EC \implies \exists C^{-1} : E = E' C^{-1} \quad C = (c_{i'}^i)_{n'}^n; C^{-1} = (c_i^{i'})_n^{n'}$$

This makes an easy way to denote whether the transition is from old to new or from new to old basis

$$(e_1, \dots, e_n) = (e_{1'}, \dots, e_{n'}) \begin{pmatrix} b_1^{1'} & \dots & b_n^{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n'} & \dots & b_n^{n'} \end{pmatrix} = E' B \implies \begin{cases} e_i = c_{i'}^i e_{i'} \\ e_{i'} = c_i^{i'} e_i \end{cases} - \text{covariant law}$$

Basis coordinates transition

$$x = x^{j'} e_{j'}; x = x^j e_j \implies ? x^{j'} = c_j^{j'} x^j?$$

$$\text{Proof: } e_j = c_j^{j'} e_{j'} \implies x^{j'} e_{j'} = x^j c_j^{j'} e_{j'} \iff [x^{j'} - c_j^{j'} x^j] e_{j'} = 0 \implies x^{j'} = c_j^{j'} x^j - \text{countervariant law}$$

In matrix form:

$$\begin{cases} X_e' = C^{-1} X_e \\ E' = EC \end{cases}$$

Linear operator

Let there be $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$

Linear operator on $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$: $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ is a linear operator IF $A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 A(x_1) + \alpha^2 A(x_2)$

Example: take $\mathbb{K}^{m \times n}, \mathcal{L}_1 = X \in \mathbb{K}^{n \times 1}, Y \in \mathcal{L}_2 = \mathbb{K}^{m \times 1}$

$AX \in \mathcal{L}_2$, this is linear operator

kernel and image

$\ker A := \{X \in \mathcal{L}_1 : AX_1 = \theta_2 \in \mathcal{L}_1\}$ - this is subset (or equal to) $\mathcal{L}_1$ that gets you θ in $\mathcal{L}_2$ after applying A

$\text{im } A := \{Y \in \mathcal{L}_2 : \exists k \in \mathcal{L}_1, y = A(X)\}$ - this is subset (or equal to) $\mathcal{L}_2$ that you can get from $A(\mathcal{L}_1)$,

Lets prove that $\ker$ is subspace of $\mathcal{L}_1$, im is subspace of $\mathcal{L}_2$:

$$\text{Let } X_1, X_2 \in \ker A : AX_1 = AX_2 = \theta_2 \implies A(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A(X_1) + \alpha^2 A(X_2) = \theta_2 \in \ker A$$

and I CANT FUCKING SEE THE PROOF ON THE OTHER PART OF BLACKBOARD FUUUUCK: but the idea is (take 2 vectors from image, take their linear combination and it appears to be also in that image)

Лекция 8 (2025-03-18)

Tue Mar 18 09:02:33 MSK 2025

$A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ - линейный оператор

$$\ker A := \{x \in \mathcal{L}_1 : A(x) = \theta_2\} \subseteq \mathcal{L}_1$$

$$\text{im } A := \{y \in \mathcal{L}_2 : \exists x \in \mathcal{L}_1, y = A(x)\} \subseteq \mathcal{L}_2$$

Теорема: $\dim \ker A + \dim \text{im } A = \dim \mathcal{L}_1$

Доказательство: пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ - базис в $\ker A$, дополняем его до базиса $\mathcal{L}_1$: $\left\{ e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E^+} \right\}$

Рассмотрим $Y^+ := \{A(E^+)\} \subset \text{im } A$. Докажем полноту: $y \in \text{im } A \implies \exists x \in \mathcal{L}_1, y = A(x) \implies x =$

$$x^j e_j = \underbrace{\sum_{j=1}^m x^j e_j}_{\in \ker A} + \sum_{j=m+1}^n x^j e_j \implies y = A(x) = A\left(\sum_{j=1}^m x^j e_j\right) + A\left(\sum_{j=m+1}^n x^j e_j\right) = 0 + \sum_{j=m+1}^n x^j A(e_j) -$$

получили разложение по семейству Y^+ . Докажем ЛН: $\sum_{j=m+1}^n \alpha^j A(e_j) = A \left(\underbrace{\sum_{j=m+1}^n \alpha^j e_j}_{\in \ker A} \right) = \theta_2;$

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha^j e_j = \sum_{j=1}^m \beta^j e_j \implies \sum_{j=1}^m \alpha^j e_j - \sum_{j=m+1}^n \beta^j e_j = \theta_1 \iff \alpha^1 = \dots = \alpha^m = \beta^{m+1} = \dots = \beta^n = 0 \implies$$

$\dim \operatorname{im} A = n - m$
 $m = \dim \ker A, n = \dim \mathcal{L}_1$

Матрица линейного оператора

$A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2; E : \text{базис в } \mathcal{L}_1$

$\forall x \in \mathcal{L}_1 : A(x) = A(x^j \cdot e_j) = x^j A(e_j)$

$A : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, E : \text{Базис } \mathcal{L}$

$$A(E) \in \mathcal{L}, A(e_j) = a_j^k e_k; \quad (A(e_1) \dots A(e_n)) = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} - \text{это называется матрицей}$$

оператора в базисе E , обозначается A_E (с индексом внизу)

Как меняется матрица оператора при переходе к новому базису?

$$A : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \text{базисы } E, E'; e_{i'} = c_{i'}^j e_j; A_E = (a_k^j)_n, A_{E'} = (a_{k'}^{j'})_{n'}$$

$$A(e_{j'}) = a_{j'}^{k'} e_{k'} = a_{j'}^{k'} c_{k'}^k e_k = A(c_{j'}^j e_j) = c_{j'}^j A(e_j) = c_{j'}^j a_j^k e_k \implies a_{j'}^{k'} c_{k'}^k = c_{j'}^j a_j^k$$

$$\{C\}_{k'}^k \{A_{E'}\}_{j'}^{k'} = \{A_E\}_j^k \{C\}_{j'}^j \implies \{C \cdot A_{E'}\}_{j'}^k = \{C \cdot A_E\}_{j'}^j \implies$$

$$A_{E'} = C^{-1} \cdot A_E \cdot C$$

Множество линейных операторов

$A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ - сделаем его линейным пространством

1. Сложение: $C := A + B, C(x) = A(x) + B(x)$

$$C(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) + B(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 (A(x_1) + B(x_1)) + \alpha^2 (A(x_2) + B(x_2)) = \alpha^1 C(x_1) + \alpha^2 C(x_2)$$

2. Умножение: $C := \alpha A, C(x) = \alpha A(x)$

Тут доказательство простое

проверим 8 Аксиом линейного пространства:

1. Коммутативность: выполняется в силу того, что она выполняется для векторов линейного пространства
2. Все оставшиеся аксиомы: будут свойствовать из свойств линейного пространства, из которого действует линейный оператор
3. Нулевой оператор: Всему пространству задаёт нулевой вектор
4. Противоположный оператор: $A^- = (-1)A \implies A^- + A = \Theta$

Введём умножение операторов: $C := AB, C(x) = A(B(x))$. Линейность типа проверили.
 Едининый оператор: $I : x \rightarrow x$
 Обратный оператор: $A^{-1}(A) = I$
 Матрица произведения операторов: $C(e_j) = A(B(e_j)) = A(b_j^m e_m) \Rightarrow c_j^k e_k = b_j^m a_m^k e_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ - так же, как мы делали до этого - $C_E = A_E B_E$ в матричной форме. Можно доказать, что
 $(C^{-1})_E = C_E^{-1}$

Теорема об обратном операторе: Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Тогда

$$\exists A^{-1} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \iff$$

$$\iff \text{im } A = \mathcal{L} \iff$$

$$\iff \ker A = \theta$$

Это можно доказать циркулярно: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2 : \exists A^{-1} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) : \forall y \in \mathcal{L} \exists! x \in \mathcal{L} : y = A(x) \in \text{im } A \Rightarrow \text{im } A = \mathcal{L}$$

$$2 \Rightarrow 3 : \text{im } A = \mathcal{L}; \dim \ker A = \dim L - \dim \text{im } A = 0 \Rightarrow \ker A = \{\theta\}$$

$$3 \Rightarrow 1 : \ker A = \{\theta\} \Rightarrow (\dim \text{im } A = \dim \mathcal{L} \wedge \text{im } A \subset \mathcal{L}) \Rightarrow \text{im } A = \mathcal{L} \Rightarrow \forall y \in \mathcal{L}, \exists x \in \mathcal{L} : y = A(x).$$

$$\text{единственность: } y_0 \in \mathcal{L} \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L} : y_0 = A(x_1) = A(x_2), A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{линейность: } y_1, y_2 \in \mathcal{L} \exists! x_1, x_2 \in \mathcal{L}, y_1 = A(x_1), y_2 = A(x_2), x_1 = A^{-1}(y_1), x_2 = A^{-1}(y_2)$$

$$A^{-1}(\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = A^{-1}(A(\beta^1 x_1 + \beta^2 x_2)) = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 = \beta^1 A^{-1}(y_1) + \beta^2 A^{-1}(y_2)$$

Лекция 9 (2025-03-25)

Tue Mar 25 09:05:04 MSK 2025

собственные векторы; собственные значения

Инвариантное подпространство линейного оператора: пусть $\mathcal{L}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{U}$: $\forall \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U} : \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \in \mathcal{U}; \quad A = L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$
 $Ax \in \mathcal{U} \forall x \in \mathcal{U}$

Пусть E_1 - базис в $\mathcal{U}$, $E_2 \supset E_1$ - базис в $\mathcal{L}$. $A(e_1) = \sum_{i=1}^n \alpha^i e_i + \underbrace{0 + \dots + 0}_{m-n}, \dots, A(e_n) = \dots$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_m^1 & \dots & \beta_1^1 & \dots & \beta_{n-m}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m & \beta_1^m & \dots & \beta_{n-m}^m \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_1^n & \dots & \beta_{n-m}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_e & D_e \\ 0 & C_e \end{pmatrix}$$

задачи на собственные векторы и значения

Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$,

$$A(e) = \lambda e \quad \exists x \in \mathbb{K} : \exists e \neq \theta$$

Пример: оператор поворота: $A_\alpha e = 1 \cdot e$

Общий вид решения: пусть E - базис в $\mathcal{L}$, $e = \alpha^i e_i = E \cdot X_e$; $A(e) = A(\alpha^i e_i) = \alpha^i A(e_i) =$

$$(A(e_1) \dots A(e_n)) \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = (e_1 \dots e_n) A_e X_e = E A_e X_e \Rightarrow \lambda e = \lambda \alpha^i e_i = E(\lambda X_e)$$

$$E(A_e X_e) = E(\lambda X_e) \implies E[A_e X_e - \lambda X_e] = \theta \implies A_e X_e = \lambda X_e \xrightarrow{X_e \neq (0, \dots)} (EA_e)X_e = \lambda(EX_e) \implies \\ \implies A(E)X_e = A(x^i e_i) = A(e) = \lambda x^i e_i = \lambda e, \quad A(e) = \lambda e, e \neq 0$$

В итоге мы получили, что задача на собственные векторы эквивалентна задаче, к которой мы пришли:

$$\begin{pmatrix} A(e) = \lambda e \\ x \in \mathbb{K} \\ e \neq \theta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} e = EX_e \\ A_e X_e = \lambda X_e \\ \lambda \in \mathbb{K}, X_e \neq 0 \end{pmatrix}$$

Необходимое и достаточное условие существования решения: $\det(A - \lambda I) \neq 0$

Рассмотрим характеристический многочлен $f(\lambda) = \det(A_e - \lambda I)$, $E' = EC$, $A_{e'} = C^{-1}A_e C$, $I = C^{-1}C$
 $\det(A_{e'} - \lambda I) = \det(C^{-1}[A_e - \lambda I]C) = \det C^{-1} \det(A_e - \lambda I) \det C = \det(A_e - \lambda I)$

Это значит, что характеристический многочлен не зависит от базиса

Вот так обозначается множество всех собственных векторов значения λ : $V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$

Нужно доказать, что $\forall x \in V_\lambda(A), Ax \in V_\lambda(A)$. Пусть $x \in V_\lambda(A)$

$$x \in \ker(A - \lambda I) \implies Ax - \lambda x = \theta \implies Ax = \lambda x \in V_\lambda(A)$$

Теорема: если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то у оператора $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ есть или одномерное, или двумерное (или оба) инвариантное подпространство

Доказательство: $A(E_n) = \lambda_n E_n$, $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}), \mathcal{L}(\mathbb{C}) \quad \lambda_n \in \mathbb{C}, e_0 \neq \theta$

Построим $\mathcal{U} = L(e_0) = \{\mu e_0, \forall \mu \in \mathbb{C}\}$

Лекция 10 (2025-03-27)

Thu Mar 27 10:51:22 MSK 2025

задача на собственный вектор/собственное значение, пример

Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}), \mathcal{L}(\mathbb{K})$

Пусть $f(t)[a, b] : f'(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}, f'(b) = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f(t) - f(b)}{t - b}, C^{(k)}$ - множество производных n -ого порядка $f(t)$ на $[a, b]$, пусть $C^\infty : f(t) \in C^\infty[a, b] : f(t) \in C^{(k)} \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L} := \{f \in C^\infty[a, b], f^{(a)} = f^{(b)} = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ - утверждаем, что это линейное пространство, проверим:

- $\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 \in C^\infty[a, b]$
- $\alpha^1 f_1^{(k)}(a) + \alpha^2 f_2^{(k)}(a) = 0$, аналогично для b

Введём оператор: $A = -\frac{d^2}{dx^2}$. Проверим его:

- $f \in \mathcal{L} : \frac{d^2 f^2}{dx} \in C^\infty[a, b]$
- $\frac{d^k}{dx^k} \frac{d^2 f}{dx^2}(a; b) = 0$
- Линейность следует из правил дифференцирования

$$Af = \lambda f_1, f \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0; \quad a := 0, b := \pi, f_n(x) := \sin \pi n x; f'' = -(\pi n)^2 \sin \pi n x; \lambda := (\pi n)^2$$

очень важная лемма: Пусть $\mathcal{L}$ - лин. пр., в нём $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \{\Theta\}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \Theta$. Пусть E - базис в $\mathcal{U}$, F - базис в $\mathcal{V}$. Тогда семейство $\{E \cup F\}$ ЛН.

Док-во: [от противного]: Пусть $G := \{E \cup F\}, \gamma = \alpha \dots \beta$ ЛЗ. рассмотрим ЛК $\gamma^i g_i, \exists \gamma^i \neq 0$. Если $\forall \beta = 0 \implies \exists \alpha \neq 0 \implies E$ -не базис. аналогично $\forall \alpha = 0 \implies \exists \beta \neq 0$. Полное противоречие((

Вывод: $E \cap F = \{\Theta\}$

д о к а з а н о

рассмотрим: $V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I). \forall x \in \ker(\dots) : (A - \lambda I)x = 0 \implies Ax = \lambda x, V_\lambda(A) - \{\text{все собственные векторы, соответствующие собственному значению } \lambda\} \cup \{0\}$

Помним, что решение задачи на собственность можно свести к $\det(A_E - \lambda I) = 0$, где определитель - это многочлен степени $n := \dim \mathcal{L}$, у него n корней. Пусть у нас имеется 2 корня из поля $\mathbb{K}$. Построим 2 пространства: $V_{\lambda_1}(A), V_{\lambda_2}(A)$

Лемма 3: $V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \{0\} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

Доказательство: пусть $x \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) \implies Ax = \lambda_1 x = \lambda_2 x \implies [\lambda_1 \neq \lambda_2] \implies x = 0$

$f(\lambda) = \det(A_E - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_{\lambda_1}} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_{\lambda_2}} \dots = (\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}} \cdot \psi(\lambda), \psi(\lambda_j) \neq 0$, где n_{λ_j} - **алгебраическая кратность** корня характеристического уравнения.

Пусть λ_j - корень уравнения $\in \mathbb{K}; A_E X_E = \lambda_j X_E \implies A e_j = \lambda_j e_j, e_j \in V_{\lambda_j}(A) \neq \{0\}$

$P_{\lambda_j} := \dim V_{\lambda_j}(A)$ - **геометрическая кратность** собственного значения λ_j .

Лемма IV.: $n_{\lambda_j} \geq P_{\lambda_j}$

Доказательство: $V_{\lambda_j} \stackrel{\text{def}}{=} \ker(A - \lambda_j I) \neq \{0\}$

Пусть $V_{\lambda_j} = L(E')$ - линейная оболочка базиса. Дополняем его до базиса $\mathcal{L} = L(E' \cup E'')$. Тогда $A e'_1 =$

$$\lambda_j e'_1, A e'_2 = \lambda_j e'_2. \text{ Матрица оператора: } (A(e'_1) \dots A(e'_m)) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \lambda_j & & \vdots & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \dots \\ 0 & \dots & & \lambda_j & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & D_E \\ 0 & C_E \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies A_E - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_j - \lambda & \\ 0 & & & C_E \end{pmatrix}, \det A_E - \lambda I = \begin{vmatrix} \lambda_j - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j - \lambda \end{vmatrix} \det(C_E - \lambda I_{n-m}),$$

$m = P_{\lambda_j}$ - геометрическая кратность

$$\det(A_E - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{P_{\lambda_j}} \det(C_E - \lambda I_{n-m}) \implies (\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}} \psi(\lambda_j) = (\lambda - \lambda_j)^{P_{\lambda_j}} \det(C_E - \lambda I_{n-m}) \implies$$

$$\implies \frac{(\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}}}{(\lambda - \lambda_j)^{P_{\lambda_j}}} = \frac{\det(C_E - \lambda I_{n-m})}{\psi(\lambda)}$$

Случай 1: $n_{\lambda_j} < P_{\lambda_j}$: не может быть (только я не понял, почему??? что-то там куда-то там стремится...)

Случай 2: $n_{\lambda_j} \geq P_{\lambda_j}$ - реализуется

Теорема 1. Для того, чтобы матрица оператора имела в некотором базисе диагональный вид, необходимо и достаточно, чтобы базис состоял из собственных векторов оператора.

Доказательство: 1. пусть $\mathcal{L}(E), A e_j = \lambda_j e_j. A_e = (A(e_1), \dots, A(e_m)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$ - диагональна.

2. Пусть Матрица диагональна; тогда $A(e_j) = \lambda_j e_j, \dots$

Теорема 2. Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{L}$ имел собственный базис $\iff$ чтобы были выполнены свойства: характеристический многочлен $f(\lambda)$ раскладывался на линейные множители в поле $\mathbb{K}$ и $(P_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}) \forall i$

Пояснение: разложение на линейные множители: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ - раскладывается в $\mathbb{C}$, но не в $\mathbb{R}$. т.е. разложение: $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m), \forall \lambda_m \in \mathbb{K}$

Доказательство: 1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ - корни характеристического многочлена, попарно различны.

Рассмотрим $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$: все они тоже попарно не пересекаются. у нас существует базис $\iff \sum_{i=1}^m \dim V_{\lambda_i} =$

$$\dim \mathcal{L}. \sum_{i=1}^m \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^m P_{\lambda_j} \leq \sum_{i=1}^m n_{\lambda_i} = n. \text{ Теперь проверим, что суммы равны, от противного: } p_{\lambda_i} < n_{\lambda_i} :$$

$$\sum_{i=1}^m P_{\lambda_j} = \sum_i \dots \text{ он решил резко закончить лекцию и концовку я не понял.}$$

Лекция 11 (2025-04-01)

Tue Apr 1 09:01:00 MSK 2025

Билинейные формы

Определение: числовая функция 2 аргументов $B(x, y) \in \mathbb{K}; x, y \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$ называется билинейной формой, если она обладает свойством линейности по обоим аргументам.

Пример: пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, B(X, Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в $\mathcal{L}$; $x = x^j e_j; y = y^k e_k \implies B(x, y) = B(x^j e_j, y^k e_k) = x^j y^k B(e_j, e_k)$
 $\{B(e_j, e_k)\}_{j,k=\overline{1,n}}$ - матрица билинейной формы.

Введём обозначение $b_{jk} := B(e_j, e_k) \implies B(x, y) = x^j y^k b_{jk} = *$

$$b_{jk} y^k = (b_{j1} \dots b_{jn}) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = B_j Y_e$$

$$x^j b_{jk} y^k = x^j B_j Y_e = (x^1 \dots x^n) \begin{pmatrix} B_1 & Y_e \\ \vdots & \vdots \\ B_n & Y_e \end{pmatrix}; \quad B_e Y_e = \left\| \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \right\| \|Y_e\| = \begin{pmatrix} B_1 & Y_e \\ \vdots & \vdots \\ B_n & Y_e \end{pmatrix}$$

$$* = (x^1, \dots, x^n) B_e Y_e \implies$$

$$B(x, y) = X_e^T B_e Y_e$$

При переходе к новому базису: $E, E', E' = EC, \quad e_{j'} = c_{j'}^j e_j$

$$b_{j'k'} = B(e_{j'}, e_{k'}) = B(c_{j'}^j e_j, c_{k'}^k e_k) = c_{j'}^j c_{k'}^k B(e_j, e_k) = c_{j'}^j c_{k'}^k b_{jk}$$

$$b_{j'k'} = \{B_{e'}\}_{k'}^{j'} = \{C\}_{j'}^j \{C\}_{k'}^k \{B_e\}_k^j = \{C\}_{j'}^j \underbrace{\{B_e\}_k^j \{C\}_{k'}^k}_{\{B_e \cdot C\}_{k'}^j} = \{C^T\}_j^{j'} \{B_e \cdot C\}_{k'}^j = \{C^T B_e C\}_{k'}^{j'}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C, \quad A_{e'} = C^{-1} A_e C, \quad A_{e'} - \text{оператор (пр. лекции)}$$

Замечание: преобразование базиса: $E' = EC$. Другой способ записи: $x = EX_e = E'X_{e'} \implies X_e = CX_{e'}$. Ещё один, новый способ: $X_e = X_{e'}, \forall x = EX_e = E'X_{e'}, \quad ECX_{e'} = E'X_{e'} \implies \underbrace{[EC - E']}_{\hat{E}} X_{e'} =$

$$\theta \implies \hat{E}X_{e'} = \theta \quad \forall X_{e'} \in \mathbb{K}^{n \times 1}.$$

$$x^1 \bar{e}_1 + \dots + x^n \bar{e}_n = \theta \implies \hat{E} = (\theta, \dots) \implies EC = E'$$

(Анти)симметричные билинейные формы

$$\text{Для любой формы справедливо: } B(x, y) = \frac{B(x, y) + B(y, x)}{2} + \frac{B(x, y) - B(y, x)}{2}$$

<Начиная отсюда я начал жёстко засыпать и записывать без доказательств>

<Заранее прошу прощения у себя, готовящегося к сессии>

Определение: билинейная форма симметричная, если $B(x, y) = B(y, x)$ **Определение:** билинейная форма антисимметричная, если $B(x, y) = -B(y, x)$

Любая форма разложима на ЛК симметричной и антисимметричной $B_{s1}(x, y) + B_{a1}(y, x) =$ второе такое же

Ранг матрицы, инварианты билинейных форм

$$C = AB \implies \operatorname{rk} C \leq \operatorname{rk} B$$

$$B_e = (C^T)^{-1} B_{e'} C^{-1} \wedge B_{e'} = C^T B_e C \implies \operatorname{rk} B_e = \operatorname{rk} B_{e'}$$

$$\operatorname{sgn} \det B_e = \operatorname{sgn} \det B_{e'}$$

Квадратичные формы

$$Q(x) = B(x, x) = X_e^T Q_e X_e, \text{ или } q_{ij} x^i x^j$$

$$\text{Наиболее простой вид: } \sum_i x_i^2$$

Теорема Лагранжа: у любой квадратичной формы $\exists$ базис, в котором она имеет канонический (наиболее простой) вид.

Лекция 12 (2025-04-10)

Thu Apr 10 10:57:38 MSK 2025

я пропустил несколько лекций по болезни

евклидовы пространства

свойства скалярного произведения: очереди в кофепорте убивают... а в сфа холодно...

Неравенство Коши-Буняковского: $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Норма вектора: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Свойства:

1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \iff x = \theta$

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Доказательство:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Метрический тензор - матрица билинейной формы: $(x, y) = G(x, y) \implies G(x, y) = X_e^T G_e Y_e$

$$\{G_e\}_k^j = (G(e_j, e_k))$$

Лемма 1: $\det G_e > 0$

$$G(x, x) = X_e^T G_e X_e > 0 \quad \forall x \neq \theta$$

Т.к. G - положительно определённая форма, то все её угловые миноры > 0 , значит, $\det G > 0$

$$\cos \varphi := \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

унитарное пространство

Полутороллинейная форма $G(x, y)$: Пусть $\mathcal{L}$ - комплексное линейное пространство. Числовая функция $G(x, y)$ называется полутороллинейной формой, если выполнены следующие 2 свойства:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ (комплексно сопряжённое число)

2. $G(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$

Свойства полутороллинейных форм:

1. $G(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \bar{\beta}^1 G(x, y_1) + \bar{\beta}^2 G(x, y_2)$ - антилинейность. Доказывается через перестановку аргументов

2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$: доказывается по перестановку аргументов

определение: полуторолинейная форма $G(x, y)$ называется положительно определённой, если $G(x, x) > 0 \quad \forall x \neq \theta$

Определение унитарного пространства: унитарным пространством называется комплексное линейное пространство, на котором введена положительно определённая полуторолинейная форма... Скибиди доп yes yes

Пример: Введём Функцию Комплексного Переменного: $f(x \in \mathbb{C}) = f_1(x) + i f_2(x); f_1, f_2 \in \mathbb{R}; f \in \mathbb{C}[0, 1] \iff f_1, f_2 \in \mathbb{R}[0, 1]$ - непрерывны. поэтому это линейное пространство. введём форму: $G(f, g) := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$. Линейна по первому аргументу как обычный интеграл по риману; переставим

аргументы: $G(g, f) = \int_0^1 g(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 \overline{f(x) \overline{g(x)}} dx = \overline{\int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx} = \overline{G(f, g)}$. Ну, конечно, мы не слишком строго это доказали, но по сути это доказывается через суммы Дарбу.

$G(f, f) = \int_0^1 f(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \quad (= 0 \iff f = 0)$ - ура она положительно определённая

Пусть $G(x, y)$ - полуторолинейная форма, пусть E - базис нашего комплексного линейного пространства; раскладываем: $G(x^i e_i, y^j e_j) = x^i \cdot \bar{y}^j \cdot G(e_i, e_j) = x^i \cdot \bar{y}^j \cdot g_{ij} = X_e^T \cdot G_e \cdot \bar{Y}_e$

Лемма 2: $\det G_e \neq 0$

Докажем от противного: $\det G_e = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & \dots & (e_n, e_n) \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_n, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_n) & \dots & (e_n, e_n) \end{vmatrix} = 0 \implies$
 $\implies \alpha^1 \begin{pmatrix} (e_1, e_1) \\ \vdots \\ (e_1, e_n) \end{pmatrix} + \dots + \alpha^n \begin{pmatrix} (e_n, e_1) \\ \vdots \\ (e_n, e_n) \end{pmatrix} = 0, (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \neq 0 \implies \begin{pmatrix} (\alpha^1 e_1, e_1) \\ \vdots \\ (\alpha^1 e_1, e_n) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} (\alpha^n e_n, e_1) \\ \vdots \\ (\alpha^n e_n, e_n) \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} (\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n, e_1) \\ \vdots \\ (\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n, e_n) \end{pmatrix} = 0 \stackrel{x := \alpha^i e_i}{=} \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \vdots \\ (x, e_n) \end{pmatrix} = 0; \implies \bar{\alpha}^1(x, e_1) + \dots + \bar{\alpha}^n(x, e_n) = 0 =$
 $= (x, \alpha^1 e_1) + \dots + (x, \alpha^n e_n) = (x, \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = (x, x) = 0 \implies x = 0 \implies \alpha^i e_i = 0$ - значит, E - не базис, противоречие: $\det G_e \neq 0$

Важно: все дальнейшие результаты будут справедливы и для евклидова, и для унитарного пространства, такие результаты будем помечать как $\varepsilon(u)$

Норма в унитарном пространстве: $\|x\| = \sqrt{G(x, x)}$

Неравенство Коши-Бунковского (u): $|G(x, y)|^2 \leq G(x, x)G(y, y)$.

Доказательство: $(\alpha x + y, \alpha x + y) \geq 0 = \alpha(x, y) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha \bar{\alpha}(x, x) + (y, y) = \left[\alpha := -\frac{\overline{(x, y)}}{(x, x)} \right] =$
 $= \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)^2} (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} - \underbrace{\frac{(x, y)}{(x, x)}(y, y)}_{=|(x, y)|^2/(x, x)} + (y, y) \geq 0 \implies \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} \leq (y, y)$ - что по сути и есть неравенство

Свойства нормы:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\|x\| = 0 \iff x = \theta)$

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$. Доказательство: $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}(x, x)} = \sqrt{\alpha^2} \|x\| = |\alpha| \|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Доказательство: $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{(x, y) + (x, y)}_{=2\Re(x, y)} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\Re(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, доказано ■

Ортогональность: в следующий раз :000

Лекция 13 (2025-04-15)

Tue Apr 15 09:04:18 MSK 2025

ортогональность

1. ОНБ - ортонормированный базис

определение: $a \perp b \iff (a, b) = 0$

$\mathcal{Q} \perp \mathcal{P} : \forall a \in \mathcal{Q}, \forall b \in \mathcal{P} : (a, b) = 0$

лемма 1: $x \perp x_j (j \in \overline{1, m}) \implies x \perp \mathcal{L}(x_1, \dots, x_m)$

лемма 2: $x \perp e_j (j \in \overline{1, m}, \{e_1, \dots, e_m\} - \text{базис в } \mathcal{L}) \implies x = \theta$

Доказательство: $x = \alpha^j e_j; (e_j, x) = 0 \forall j; \alpha^j (e_j, x) = 0 \implies (\alpha^j e_j, x) = 0 \implies (x, x) = 0 \implies x = \theta$ ■

лемма 3: $e_j \neq \theta (j \in \overline{1, m}) \wedge (e_j, e_k) = 0 (j \neq k) \implies \{e_1, \dots, e_m\} - \text{линейно независимо.}$

Доказательство: пусть $\alpha^j e_j = \theta, (\alpha^j e_j, e_k) = 0 \implies \alpha^j (e_j, e_k) = 0 \iff \alpha^j = 0 \iff a_j = 0 \quad \forall j \in \overline{1, m} - \text{значит, ЛН}$

определение ОНБ: $\{e_1, \dots, e_m\} : (e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \overline{1, m}$

теорема 1: $\{e_1, \dots, e_n\} - \text{ОНБ} \implies x = \sum_j (x, e_j) e_j, \|x\| = \sum_j |(x, e_j)|^2$ (формула Гиббса и равенство Парсеваля соотв.)

Доказательство: $x = x^j e_j \implies (x, e_k) = (x^j e_j, e_k) = x^j (e_j, e_k) = x_k \implies x = \sum_j (x^j, e^j) e_j$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= (x, x) = \left(\sum_j (x^j, e^j) e_j, \sum_j (x^j, e^j) e_j \right) = \sum_j (x^j, e^j) \left(e_j, \sum_j (x^j, e^j) e_j \right) = \sum_j \sum_j (x^j, e^j) \overline{(x^j, e^j)} \underbrace{(e_j, e_k)}_{=\delta_{jk}} = \\ &= \sum_j (x^j, e^j) \overline{(x^j, e^j)} = \sum_j |(x^j, e^j)|^2 \end{aligned}$$

Пусть имеется базис $E, E' - \text{ОНБ: } E' = EC$. Какие ограничения на эту матрицу? $EC = (a_1, \dots, a_n)$, $\det C \neq 0 \implies \{a_1, \dots, a_n\} - \text{тоже базис (не обязательно ОНБ). Доказательство будет на консультации перед экзаменом. А что делать, чтобы базис } A \text{ был ОНБ?}$

Лемма 4: Ортонормированная матрица обладает свойством: $C^T \overline{C} = I$

Доказательство: пусть $x = EX_e = E'Y_{e'}; y = EY_e = E'Y_{e'}; (x, y) = G(x, y) = X_e^T G_e \overline{Y_e} = X_{e'}^T G_{e'} \overline{Y_{e'}}$, где $\{G_e\}_k^j = G(e_j, e_k)$, поэтому $(e_j, e_k) = \delta_{jk}; (e_{j'}, e_{k'}) = \delta_{j'k'} \implies G_e = G_{e'} = I \implies X_e^T \overline{Y_e} = X_{e'}^T \overline{Y_{e'}} \implies X_{e'}^T C^T \overline{C} Y_{e'} = X_{e'}^T \overline{Y_{e'}} \implies X_{e'}^T [C^T \overline{C} - I] \overline{Y_{e'}} \quad \forall X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{K}^{n \times 1} = 0$. Пока что не будем доказывать, докажем на консультации, что то, что внутри квадратных скобок равно нулю, поэтому $C^T \overline{C} = I$

задача о перпендикуляре пусть имеется ортонормированное семейство E , содержится в евклидовом или унитарном пространстве $\mathcal{L}$, $e_j \neq \theta$. Пусть $\exists x \notin L(e_1, \dots, e_m), x \in \mathcal{L}$. $x = y + z$, где $y \in L(E), z \perp L(E)$. Другими словами, надо представить x как сумму перпендикуляра к линейной оболочке и чего-то из линейной оболочки. $y = x^j e_j; z := x - x^j e_j$. Я не понял, почему, но $(z, e_k) = 0 \quad \forall k \in \overline{1, m}$, поэтому

$$(x - x^j e_j, e_k) = 0; (x, e_k) = \sum \lambda^j (e_j, e_k) \implies (x, e_k) = \lambda^k (e_k, e_k) \implies \lambda^k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}.$$

теорема Грама-Шмидта: в любом евклидовом или унитарном пространстве $\exists$ ОНБ.

Доказательство: Пусть $\mathcal{L} = \varepsilon \vee \mathcal{L} = \mathcal{U}$. Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$. $e_{1'} := e_1 \implies L(e_1) = L(e_{1'})$. Предположим, что мы построили ортогональное семейство $\{e_{1'}, \dots, e_{m'}\} \in L(e_1, \dots, e_m)$;

$L(e_{1'}, \dots, e_{m'}) = L(e_1, \dots, e_m)$. Теперь $e_{m'+1} := e_{m+1} - \sum_{j=1}^{m'} \frac{(e_{m+1}, e_{j'})}{(e_{j'}, e_{j'})} e_{j'}$. По построению $e_{m'+1} \perp L(e_1, \dots, e_m)$

$e_{m'+1} \in L(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}) = L(e_{1'}, \dots, e_{m'}, e_{m+1})$. То есть наше новое дополненное семейство - базис в "дополненной" ЛО. Вывод: $\{e_{1'}, \dots, e_{m'}, e_{m'+1}\}$ - базис в $L(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$. Таким образом на n шагов строим базис в $\mathcal{L}$. Таким образом на n шагов строим ортогональный базис в $\mathcal{L}$. Чтобы построить ОНБ, просто нормируем базис. ГГ. ■

Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

сопряжённый оператор

Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ ($\mathcal{L} = \varepsilon \vee \mathcal{L} = \mathcal{U}$)

определение: сопряжённый оператор: $A^*(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}) : (x, A^*y) = (Ax, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$

Пример: сопряжённый оператор $\mathbf{I}^*$ равен $\mathbf{I}$. С нулевым оператором то же самое. Теперь посмотрим на линейный оператор векторного произведения: $A\vec{x} := [\vec{a}, \vec{x}]$. $(A\vec{x}, \vec{y}) = ([\vec{a}, \vec{x}], \vec{y}) = \langle \vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{a} \rangle = (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{a}]) = (\vec{x}, -[\vec{a}, \vec{y}]) = (\vec{x}, -A\vec{y}) \implies A^* = -A$