

Определители

Определитель n -ого порядка

Щас будем рассматривать определитель:

Полилинейность: <пропустил кусок лекции>

Кососимметричность: $f(x, y) = -f(y, x)$

Пример: $f(x, y) = x - y$

$f(x, y, z) = -f(x, z, y)$

Определитель: $A = K^{n \times n}; = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \|A_1 \dots A_n\|$

$\det A = |A_1, A_2, \dots, A_n|$ Обладает 3 свойствами:

1. Полилинейности:

$$|\alpha^1 A_1^1 + \alpha^2 A_1^2, A_2, \dots, A_n| = \alpha_1 |A_1^1, \dots, A_n| + \alpha_2 |A_1^2, \dots, A_n|$$

2. Кососимметричности:

$$|A_1, A_2, \dots, A_n| = -|A_2, A_1, \dots, A_n|$$

3. Нормировки $\det I = 1$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \|e_1, e_2, \dots, e_n\|, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Свойство базисности: столбцы $e_1, \dots, e_n$ являются базисом в пр-ве столбцов

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ЛК}$$

Определитель как функция столбцов $A : \det A = |A_1, \dots, A_n|$

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} e_{\sigma_1}, \dots, A_n = \sum_{\sigma_n=1}^n a_n^{\sigma_n} e_{\sigma_n}$$

$$\det A = \left| \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} e_{\sigma_1}, \dots, A_n \right| = \sum_{\sigma_1=1}^n a_1^{\sigma_1} |e_{\sigma_1}, A_2, \dots, A_n| = \sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_n=1}^n a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots a_n^{\sigma_n} |e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots, e_{\sigma_n}|$$

По кососимметричности $|e_1, e_1, \dots, e_{n-1}| = -|e_1, e_1, \dots, e_{n-1}| = 0$, т.е. если хотя бы 2 инд. совпадают, опр. равен нулю

$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \forall (i \neq j \Rightarrow \sigma_i \neq \sigma_j) : |e_{\sigma_1}, \dots| \neq 0$, поэтому σ - перестановки, их $n!$

По нормировке: $|e_1, \dots, e_n| = 1 \xrightarrow{\text{По нормировке}} |e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_n}| = \pm 1$

[Перестановки образуют группу, но у нас на это нет времени...]

Введём чётность перестановки: чётная (нечётная) перестановка получается чётным (нечётным) количеством транспозиций, знак перестановки: $\text{sgn } \sigma = (-1)^{(\text{кол-во перестановок})}$

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot a_1^{\sigma_1} \dots a_n^{\sigma_n}$$

Системы Крамера

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + \dots + a_n^n x^n = b^n \end{cases} \Rightarrow x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 A_1 + \dots + x^n A_n = B$$

$$A := \|A_1, \dots, A_n\|, \Delta = \det A \neq 0, \Delta_1 = |B, A_2, \dots, A_n|, \dots, \Delta_n = |A_1, \dots, A_{n-1}, B|$$

$$\Delta_1 = |x^1 A_1 + \dots + x^n A_n, A_2, \dots, A_n| = x^1 |A_1, \dots, A_n| + x^2 \underbrace{|A_2, A_2, \dots, A_n|}_{=0} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ Аналогично } x^k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

Свойства определителя n -ого порядка

1. $\det A = \det A^T$

2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Доказательство: $C := A \cdot B = \left\| \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \right\| \|B_1, \dots, B_n\| = \begin{pmatrix} A^1 B_1 & \dots & A^1 B_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^n B_1 & \dots & A^n B_n \end{pmatrix}$

$$C_k = \begin{pmatrix} A^1 B_k \\ \vdots \\ A^n B_k \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n \begin{pmatrix} a_s^1 b_k^s \\ \vdots \\ a_s^n b_k^s \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_k^s A_s, \text{ т.е. } K\text{-ый столбец } (A \cdot B) \text{ - ЛК столбцов } A, \text{ с коэфф-}$$

ами из k -ой строки b

$$\det C = |C_1, \dots, C_n| = \left| \sum_{s_1=1}^n b_1^{s_1} A_{s_1}, \dots \right| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_1^{\sigma_1} \dots b_n^{\sigma_n} \det A = \det A \cdot \det B$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$

4. Определитель треугольной матрицы: т.к. $a_k^j = 0, k > j$: перестановка $\neq 0!$: $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ - то есть в единственном случае, который соответствует диагонали

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i^i$$