

Лекция 2

Докажем, что $\det A = 0 \iff$ столбцы ЛЗ

Достаточность: $A = \|A_1, \dots, A_n\|, \exists(\alpha^1, \alpha^2, \dots) \neq (0, 0, \dots) : \alpha^1 A_1 + \dots + \alpha^n A_n = 0 \Rightarrow \beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1},$

Пусть $\alpha_1 \neq 0: A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \dots$

$\det A = |A_1, A_2, \dots| = |\beta^2 A_2 + \dots, A_2, \dots| = [\text{по полилинейности}] = 0$

Разложение по столбцу/строке

Пусть $A \in K^{n \times n}, \det A = |A_1, A_2, \dots, A_n|, A_j = \sum_{k=1}^n a_j^k e_k,$

$\det A = |A_1, A_2, \dots, A - n| = |A_1, \dots, a_j^k e_k, \dots, A_n| = a_j^k A_j^k, \text{ где}$

$A_j^k = |A_1, \dots, A_{j-1}, e_k, A_{j+1}, A_n|$, перестановками приводим к виду, где первый столбец - это $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, таким

образом получаем, что знак $(-1)^{k+j}$, т.е. можно записать

$$\det A = \sum_k a_j^k A_j^k \stackrel{A_j^k = (-1)^{k+j} M_j^k}{=} \sum_k (-1)^{k+j} a_j^k M_j^k - \text{это разложение по } j\text{-ому столбцу}$$

$$\det A = \det A^T = (a^T)_j^k (A^T)_j^k \stackrel{(a^T)_j^k = a_k^j}{=} \sum_j a_j^k A_j^k - \text{разложение по } j\text{-ой строке}$$

Фальшивое разложение определителя

$$\det A = |A_1, \dots, A_n| = |A - 1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n|$$

Рассмотрим $|A - 1, \dots, A_{j-1}, A_P, A_{j+1}, \dots, A_n|, P \in \overline{1, n}, P \neq j \implies \det A^P = 0$

Разложим по базису: $A^P = \sum_{k=1}^n |A_1, \dots, A_{j-1}, e_k, A_{j+1}, \dots, A_n| = a_P^k A_j^k \implies \det \sum_k a_P^k A_j^k = \det A \cdot \delta_{kp}$

Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}; A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Необходимое условие существования: $\det A \neq 0$: легко выводится из определителя произведения

$$\begin{aligned} \text{Достаточное условие: } A^T &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}; \text{adj } A = A^\vee = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}; A \cdot A^\vee = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \cdot \|A^{\vee^1}, A^{\vee^2}, \dots\| = \\ &= \begin{pmatrix} A^1 A^{\vee^1} & \dots & A^1 A^{\vee^n} \\ \vdots & & \vdots \\ A^n A^{\vee^1} & \dots & A^n A^{\vee^n} \end{pmatrix} = \text{по фальшивому разложению} = \text{diag } \det A = \det A \cdot I \end{aligned}$$

Тогда получаем, что обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\vee$

Теорема о базисном миноре

У нас буквой M обозначается ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ минор. Рассмотрим обычный:

Минор матрицы: $A \in \mathbb{K}^{n \times m} = \begin{vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{vmatrix} = \|A_1, \dots, A_n\|, r \in [1, \min\{m, n\}]$

Выберем r строк и столбцов, не меняя порядок,

$\begin{bmatrix} A^{j_1}, \dots, A^{j_m}, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m \\ A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \end{bmatrix}$, и составим матрицу из пересечения выбранных строчек и столбцов,

и определитель этой матрицы называется минор: $= M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$

Базисный минор: Минор порядка r базисный, если он $\neq 0$, а любой минор $r+1$ порядка, если $\exists, = 0$

Не существует минора нулевой матрицы

Попробуем найти базисный минор: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: берём $M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Можно найти базисный минор по схеме Гаусса-Жордана

Строчки и столбцы, на пересечении которых находится базисный минор, называются базисными

САМА ТЕОРЕМА (о базисном миноре):

1. Базисные столбцы ЛН

2. Любой столбец матрицы есть ЛК базисных (то же со строками)

Другими словами: Базисные столбцы образуют базис в линейной оболочке столбцов матрицы

Доказательство: для простоты базисный минор $\exists$ - первые r строк и столбцов

$M \neq 0 \implies \{A_1^{1:r}, \dots, A_r^{1:r}\}$ ЛН, при этом полные столбцы $\{A_1, \dots, A_r\}$ тоже ЛН (мы можем пойти от обратного: предположить, что ЛЗ, составить ЛК = 0 по определению, стереть часть столбцов и получить противоречие)

Если $A_j : j \in \overline{1, r}$: то выражается как лк $\alpha = 0, \dots, 1_j, \dots, 0$

Иначе, рассмотрим столбцы $A_1, \dots, A_r, A_j$, строки $A^1, \dots, A^r, A^s$ $s \in \overline{1, m}$ -ую строку, и рассмотрим полученный минор: Если $s \in \overline{1, r}$, то $M = 0$ (есть ЛЗ строки), иначе $M = 0$ т.к. минор $r+1$, и он всегда равен 0 (по условию базисного минора), тогда все строки и столбцы ЛЗ, тогда $\exists$ ЛК столбцов, переносим A_j вправо, получаем $A_j = \text{ЛК}\{A_1, \dots, A_r\}$ ■