

Линейное пространство

Пусть $\forall a, b \in \mathcal{L}$:

$$a + b \in \mathcal{L}$$

$$\beta \cdot a \in \mathcal{L} (\forall \beta \in \mathbb{K})$$

Линейное пространство: множество $\mathcal{L}$ с двумя операциями называется ЛП, если выполнены следующие св-ва этих операций:

1. Коммутативность ($a + b = b + a$)
2. Ассоциативность ($a + (b + c) = (a + b) + c$)
3. $\exists \theta, \forall a : a + \theta = a$ (сущ. нулевой элемент)
4. $\forall a \exists (-a) \in \mathcal{L} : a + (-a) = \theta$
5. $\forall a 1 \cdot a = a$
6. $\beta(\gamma \cdot a) = (\beta \cdot \gamma)a$
7. $(\beta + \gamma)a = \beta \cdot a + \gamma \cdot a$
8. $\beta(a + b) = \beta \cdot a + \beta \cdot b$

Пример: вектор на прямой V_1 , аналогично V_2, V_3

Другой пример: $P_n(\mathbb{R}) : t^0 \cdot \alpha_0 + t^1 \cdot \alpha_1 + \dots + t^n \cdot \alpha_n$

Третий пример: Матрицы! $A, B \in K^{m \times n}$

Лемма 1: Нулевой элемент единственен

Доказательство: Пусть нул. элемента два: θ_1, θ_2 :

$$\begin{cases} a + \theta_1 = a \\ a + \theta_2 = a \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \implies \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \implies \theta_1 = \theta_2$$

Лемма 2: противоположный вектор единственен.

Доказательство: Пусть $a, b, c \in \mathcal{L} : \begin{cases} a + c = \theta \\ a + b = \theta \end{cases}$

$$c = c + \theta = c + (a + b) = (c + a) + b = \theta + b = b \implies \mathbf{c = b}$$

Лемма 3: Пусть $a, b \in \mathcal{L}$ фиксированы, тогда $\exists! x : a + x = b$

Доказательство: Существование: $x = b + (-a)$ (очевидно); Единственность: $x = (x + a) + (-a) = b + (-a)$

Лемма 4: $0 \cdot a = \theta$

Доказательство: $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Рассмотрим ур-е, $\exists! x : 0 \cdot a + x = 0 \cdot a \implies x = 0 \cdot a + 0 \cdot (-a) = 0$

Лемма 5: $\alpha \cdot \theta = \theta$

Доказательство: $(*) = \alpha \cdot (\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$, далее аналогично (4).

Лемма 6: $(-a) = -1 \cdot a$

Доказательство: $1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \theta$, поэтому по единственности $-a = -1 \cdot a$

Вот они и все основные свойства

линейная (не)зависимость

$\alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_n \cdot a_n$ - ЛК

Тривиальная ЛК: $\alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

Семство $a_1 \dots a_n$ ЛЗ, если $\exists$ нетривиальная ЛК $= 0$

Семейство $a_1 \dots a_n$ ЛН, $\exists$ ЛК $= 0 \iff \alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

Лемма 7: Вектор a линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен θ

Доказательство:

$$\text{необходимость: } \alpha \cdot a = \theta, \alpha \neq 0 \implies a = \frac{1}{\alpha} \theta$$

достаточность: $a = \theta : 1\theta = \theta \implies a$ ЛЗ

Лемма 8: Если семейство содержит θ , то оно ЛЗ

Доказательство: $\alpha \cdot \theta + 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_n = \theta$

Лемма 9: Если у семейства есть ЛЗ подсемейство, то само семейство тоже ЛЗ

Доказательство: $\Delta = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$, где $\{a_1, \dots, a_m\}$ ЛЗ. $\implies \exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$: ЛК = 0

Покажем ЛК: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m + 0 \cdot a_{m+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \theta \implies \{a_1 \dots a_n\}$ - ЛЗ

Лемма 10: Если семейство векторов $a_1 \dots a_n$ ЛН, то любое его подсемейство ЛН

Доказательство: тривиально

Лемма 11: Пусть семейство состоит из > 2 векторов. Тогда для ЛЗ Необходимо и достаточно, чтобы

Один из векторов линейно выражался через оставшиеся

Доказательство:

Необходимость: Существует ЛК = 0, пусть $\alpha_1 \neq 0 \implies a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 + \dots$ - выражается

Достаточность: пусть $a_1 = \beta_2 a_2 + \dots \implies (-1)a_1 + \beta_2 a_2 + \dots = \theta$ - ЛЗ

Лирическое отступление

Теорема о базисном миноре: $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, базисные столбцы базисного минора образуют базис

Пусть у матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \|A_1 \dots A_n\| \exists$ базисный минор, построен на первых $1 \leq r \leq \min(n, m)$ строках, столбцах

Запишем $A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} = \|A^{1^T} \dots A^{n^T}\|. (A')^T = \alpha^1 A^{1^T} + \dots \implies A' = \alpha^1 A^1 + \dots$, крч не понял я

это доказательство, но вроде понятно, что для строк теорема о базисном миноре работает.

Рассмотрим однородную, но не квадратную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + \dots + a_n^2 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = 0 \end{cases}, 1 \leq m < n \quad (!!!)$$

Лемма 12: у этой системы $\exists$ нетривиальное решение.

Доказательство: перепишем в матричной форме: $\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \begin{cases} A^1 \cdot \mathcal{X} = 0 \\ \vdots \\ A^m \cdot \mathcal{X} = 0 \end{cases} \quad \text{- если раскрыть, то это изначальная система.}$$

если A нулевая, решение тривиально. если ненулевая, то есть базисный минор (пусть расположен удобно), тогда j -ая строка $= c_j^1 A^1 + \dots + c_r^j A^r$ (по т-ме о базисном миноре). Рассмотрим укороченную с.

$$\begin{cases} A^1 \cdot \mathcal{X} = 0 \\ \vdots \\ A^r \cdot \mathcal{X} = 0 \end{cases} \quad \text{решения полной явл. решениями укороченной.}$$

проверим обратное: $A^j \mathcal{X} = c_j^1 (A^1 \mathcal{X}) + \dots + c_r^j (A^r \mathcal{X}) = c_j^1 \cdot 0 + \dots = 0 \quad (j = \overline{r+1, m})$

Получается система:
$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_n^r x^n = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = -a_{r+1}^1 x^{r+1} - \dots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_n^r x^r = -a_{r+1}^r x^{r+1} - \dots - a_n^r x^n \end{cases}$$

$(1 \leq r \leq \min \{m, n\} < n)$

$$\tilde{\mathbf{A}}_r \cdot \mathcal{X}_r = \mathbf{B}_r; \det \tilde{\mathbf{A}}_r \stackrel{\text{def}}{\neq} 0 \implies \mathcal{X}_r = \left(\tilde{\mathbf{A}}_r \right)^{-1} \cdot \mathbf{B}_r, x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^r \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$