Вопрос существования изоморфизма

Лемма 1: Если размерности линейный пр-в совпадают, то они изоморфны.
Доказательство: пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в $\mathcal{L}_1$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис в $\mathcal{L}_2$

$$\varphi_E : \mathcal{L}_1 \to K^{n\times 1} \qquad x \in \mathcal{L}_1, x = x^i e_i = E \cdot X_e = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \varphi_E(x) = X_e, \varphi_E \cdot x \to X_e$$

Покажем однозначность: $x = EX_e = EY_e, E(X_e - Y_e) = \theta \implies (x^i - y^i)e_i = \theta, x^i = y^i \implies X_e = Y_e$
Получилось, что φ_E – взаимнооднозначное отображение. Теперь линейность:
$x_3 = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = EX_{e3} = \alpha^1 EX_{e1} + \alpha^2 EX_{e2} \implies E(\underbrace{\alpha^1 x_{e1} + \alpha^2 x_{e2} = X_{e3}}_{0}) = \theta,$

$X_{e3} = \alpha^1 X_{e1} + \alpha^2 X_{e2}; \varphi(x_3) = \varphi(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = X_{e3} = \alpha^1 X_{e1} + \alpha^2 X_{e2} = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x-2)$
Тогда φ_E - изоморфизм. Аналогично введём φ_F
Имеем: $\varphi_E : \mathcal{L}_1 \to K^{n\times 1}, \varphi_F : \mathcal{L}_2 \to K^{n\times 1}, \varphi_F^{-1} : K^{n\times 1} \to \mathcal{L}_2; \qquad \varphi = \varphi_F^{-1} \circ \varphi_E : \mathcal{L}_1 \to K^{n\times 1} \to \mathcal{L}_2$

Лемма 2: Если $\dim \mathcal{L}_1 \neq \dim \mathcal{L}_2$, то они не изоморфны
доказательство: Пусть между ними $\exists \varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, m = \dim \mathcal{L}_1 > \dim \mathcal{L}_2 = n$.
Введём базис $\{e_1, \dots, e_m\} : \mathcal{L}_1;\ \{f_1, \dots, f_n\} : \mathcal{L}_2$
$\underbrace{\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)\}}_{m} \subset \mathcal{L}_1 = L(\underbrace{f_1, \dots, f_n}_{n})$, из какой-то теоремы $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)\}$ - ЛЗ.

$\alpha^1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha^m \varphi(e_m) = \theta_2 \implies \varphi(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m) = \theta_2 \implies \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m = \varphi^{-1}(\theta_2) = \theta_1$ - отсюда противоречие: базис линейно зависим.

СЛАУ (системы линейный алгебраических уравнений)

Ранг матрицы

$A^{m\times n} = \left\| A_1, \dots, A_n \right\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|$ **Определение**: $\operatorname{rg} A = \dim \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$

Предположим, что $A \neq 0$, базисные столбцы A - первые r

1. $A_1, \dots, A_r$ - ЛН
2. $A_j = \alpha^i A_i, i \in \overline{1, r}, j \in \overline{1, n}$

Докажем, что $A_1, \dots, A_r$ - Базис в $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$.
$B \in \mathcal{L}(A_1, ;A_n) = \beta^1 A_1 + \dots + \beta^n A_n = \beta^1 A_1 + \dots + \beta^r A_r + \beta^{r+1} A_{r+1} + \dots + \beta^n A_n =$
$= \beta^1 A_1 + \dots + \beta^r A_r + (\gamma^{11} A_{11} + \dots + \gamma^{r1} A_{r1}) + \dots$

То есть $A_1, \dots, A_r$ - **Базис в ЛО пространства столбцов**

Лемма 3: $\dim \mathcal{L}(A^1, dots, A^m) = r$

Доказательство: $A \in m \times n = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|$, пусть базисный минар на первых r строках.
$A^T = \left\| A^{1^T}, \dots, A^{m^T} \right\|$, до A^{r^T} - базисные столбцы, $\dim \mathcal{L}(A^{1^T}, \dots, A^{m^T}) = r$
$L(A^{1^T}, \dots, A^{m^T}) \overset{\text{очевидно}}{=} L(A^1, \dots, A^m) = r$

способы задания СЛУ

1. $\begin{cases} a_1^1x^1 + \dots + a_n^1x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^mx^1 + \dots + a_n^mx^n = b^m \end{cases}$

2. $A \times X = B, \qquad A + \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots b^m \end{pmatrix}$

3. $x^1A_1 + \dots + x^nA_n = B$ или $x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$

4. $A^1X = b^1, \dots, A^mX = b^m \qquad A_j = \begin{pmatrix} a_1^j & \dots & a_n^j \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

Совместная система - есть хотя бы 1 решение, **невосместная** - нет решений
Однородная: $B = 0$, **Неоднородная**: $B \neq 0$

———————————————————————————————————————

$AX = B, A \in \mathbb{K}^{n\times n}, x, B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$

Если det $A \neq 0$, то система называется **крамеровской**

Теорема 1. Крамеровская система: $\exists!$ решение

Рассмотрим: dim $\mathbb{K}^{n\times 1} = n : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$ - Базис с n векторов.

Так же произвольные n ЛН столбцов образовывают базис (т.к. если добавить один любой столбец к семейству, оно станет ЛЗ, т.е. $\exists$ нетрив. ЛК $= 0$)
$-\frac{\alpha^1}{\beta}A_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\beta}A_n = A_{n+1} \implies \{A_1, \dots, A_n\}$ - базис (А если $\beta = 0$, то противорчение: $A_1, \dots, A_n$ ЛЗ)
Докажем теорему о крамеровской системе:
1. $A_1, \dots, A_n$ - ЛН (т.к. det $A \neq 0$), поэтому они образуют базис: $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1} \exists!\ x^1 \dots, x^n \in \mathbb{K}$: $x^1A_1 + \dots + x^nA_n = B$. Получается, что $x^1, \dots, x^n$ - ЕДИНСТВЕННОЕ (из единственности разложения по базису) решение.

Рассмотрим $AX = 0, \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, X \in \mathbb{K}n \times 1, 0 \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. Пусть X_1, X_2 - решения. возьмем ЛК:
$X_3 = \alpha^1X_1 + \alpha^2X_2 \implies A \cdot X_3 = A(\alpha^1X_1 + \alpha^2X_2) = \alpha^1(AX_1) + \alpha^2(AX_2) = 0 + 0 = 0$, то есть
Вывод: **ЛК любых 2 решений образовывает новое решение (ОСЛУ)**

Введём множество: $K^{n\times 1} \supset \mathcal{N}_i := \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} | AX = 0\}$, таким образом $\mathcal{N}$ - линейное (под)пространство, и тогда там есть БАЗИС - ФСР (фундаментальное семейство решений)

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема: $AX = B$ совместна $\Longleftrightarrow$ rg $A =$ rg $A\vdots B$, где $A\vdots B = \|A_1, \dots, A_n, B\|$
Доказательство:
1. Докажем: $AX = B$ совместна $\iff \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B)$:

Необходимость: Пусть система имеет решение: $B = x^1A_1 + \dots + x^nA_n \in \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \implies$
$\begin{cases} \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B) \subseteq L(A_1, \dots, A_n) \\ \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, B) \supseteq L(A_1, \dots, A_n) \end{cases} \implies$ они равны

Достаточность: $\mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n, B) = \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n) \implies B \in L(A_1, \ldots, A_n) \implies B = x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n$ - решение
2. Докажем, что

$$L(A_1, \ldots, A_n) = L(A_1, \ldots, A_n, B) \iff \dim L_A = \dim L_{A:B} \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A \vdots B$$

Доказано.

Теорема Фредгольма (очень важная!)

Рассмотрим квадратную СЛУ $AX = B$

Первая теорема: Если однородное уравнение имеет !(тривиальное) решение, но неоднородное уравнение разрешимо для $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$
Доказательство: $x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n = 0$ - единственное решение $\implies$ ЛЗ $\implies$ образую базис в $\mathbb{K}^{n\times 1}$, поэтому $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times 1}\ \exists! x^1, \ldots, x^n : B = x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n$

Вторая теорема: Если однородное уравнение $AX = 0$ имеет > 1 решений, то $\exists B \in \mathbb{K}^{n\times 1} : AX = B$ несовместна.
Доказательство: $x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n = 0$ - имеет нетривиальные решения $\implies$ ЛЗ.
Рассмотрим $\mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n\times 1}) \implies \exists B \in \mathbb{K}^{n\times 1} \notin \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n) \implies$
$\implies \nexists x^1, \ldots, x^n : x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n = B$, то есть нет решений $AX = B$