продолжаем ОСЛУ

множество решений $AX = 0$ образует линейное подпространство пространства столбцов

попробуем найти базис:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = 0 \end{cases}, m, n \in \mathbb{M} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

случай $A = 0 \implies \mathcal{N} = \mathbb{K}^{n \times 1}$, dim $\mathcal{N} = n$

случай $A \neq 0$: пусть $A^1, \dots, A^r$ - базисные строки

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ a^r \\ a^{r+1} \\ \vdots \\ a^m \end{Vmatrix}, A^j = c_1^j A^1 + \dots + c_r^j A^r; j = \overline{r+1, m}, \qquad \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A^1 X = 0 \\ \vdots \\ A^j X = 0 \\ \vdots \\ A^m X = 0 \end{cases} (*) \implies \begin{cases} A^1 X = 0 \\ \vdots \\ A^r X = 0 \end{cases} (**)$$

Вывод: если X решение $(*)$, то оно же решение $(**)$

Проверим обратное: $A^j X = c_1^j A^1 X + \dots + c_1^j A^r X = 0$

Вывод: если X решение $(**)$, то оно же решение $(*)$

Тогда эти две системы **эквивалентны**. Выпишем укороченную систему:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_n^r x^n = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = -a_{r+1}^1 x^{r+1} - \dots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_r^r x^r = -a_{r+1}^r x^{r+1} - \dots - a_n^r x^n \end{cases} \implies \tilde{A}_r \tilde{X}_r = \tilde{B}_r,$$

$\tilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{pmatrix}, \tilde{X}_r = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix}, \tilde{B}_r = -\begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1}^r & \dots & a_n^r \end{pmatrix}$, det $\tilde{A}_r \neq 0 \implies$ Допустим 2 решения:

$AX_0 = AY_0 = 0, X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \tilde{A}_r \tilde{X}_{0r} = \tilde{A}_r \tilde{Y}_{0r} = \tilde{B}_r$, значит решение одно (не очень понял эту часть)

алгоритм построения ФСР

$\tilde{A}_r\tilde{X}_r = \tilde{B}_r, \tilde{B}_r = -\begin{pmatrix} a^1_{r+1} & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^r_{r+1} & \dots & a^r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ пусть$x^{r+1} = 1, x^{r+2} = \dots = x^n = 0 \implies \tilde{B}^{1r} = -\begin{pmatrix} a^1_{r+1} \\ \vdots \\ a^r_{r+1} \end{pmatrix}$,

$X_1 = \begin{pmatrix} x^1_1 \\ \vdots \\ x^r_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Пусть $x^{r+2} = 1$, остальное нули $\implies \tilde{B}_{2r} = -\begin{pmatrix} a^1_{r+2} \\ \vdots \\ a^r_{r+2} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x^1_2 \\ \vdots \\ x^r_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_{n-r} = \begin{pmatrix} x^1_{n-r} \\ \vdots \\ x^r_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Более словестное пояснение алгоритма:

1. Пусть $x^{r+1} = 1$ получаем столбец
2. Пусть $x^{r+2} = 1$
3, ..., n-r: $x^{r+i} = 1$

Докажем ЛН: $\alpha^1 X_1 + \dots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = \begin{pmatrix} z^1_0 \\ \vdots \\ z^r_0 \\ \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \Theta \implies \alpha^1 = \dots = \alpha^{n-r} = 0$

Докажем полноту:

Пусть $X_0 \in \mathcal{N} : AX_0 = \Theta;\quad X_0 = \begin{pmatrix} x^1_0 \\ \vdots \\ x^r_0 \\ x^{r+1}_0 \\ \vdots \\ x^n_0 \end{pmatrix},\quad Y_0 := X^{r+1}_0 X_1 + \dots + x^n_0 X_{n-r} = \begin{pmatrix} y^1_0 \\ \vdots \\ y^r_0 \\ x^{r+1}_0 \\ \vdots \\ x^n_0 \end{pmatrix}$, нижние переменные совпадают $\implies X_0 = Y_0 \implies X_0 = x^{r+1}_0 X^1 + \dots + x^n_0 X_{n-r}$, то есть любое решение можно выразить через базисные столбцы. Столбцов получилось $n - r$, тогда $\dim \mathcal{N} = n - r$, где r - порядок базисного минора

Ковекторы

Определение ковектора (линейной формы/линейного функционала): функция на линейном пр-ве $f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, обладает свойством линейности: $f(\alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^n x_n) = \alpha^1 f(x_1) + \dots + \alpha^n f(x_n)$.

Часто используется такое обозначение: $\langle f, x\rangle \equiv f(x)$

Примеры ковекторов: $\mathcal{L} =$ множество непрерывных функций на $[0, 1]$
$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$, есть свойство линейности.
$f\cdot = \int_0^1 f(x) \cdot dx$ (точкой обозначается место, где должна стоять другая функция, например)

Пусть $\mathcal{L}$ - множество дифф. ф-ий: $\langle f, \varphi\rangle = \frac{d\varphi}{dt}(0)$. Линейность есть, ковектор - это ДЕЙСТВИЕ.

δ**-функция дирака**: $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$

НЕВЕРНО её представляют так: $\langle \delta, \varphi\rangle = \int_{-1}^1 \delta(x)\varphi(x)dx, \delta = \begin{cases} +\infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$

Интеграл по риману вообще тут смысла не имеет, по лебегу это тупо 0.

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пр-во. пусть $\mathcal{L}^*$ - множество всех ковекторов в $\mathcal{L}$. попробуем сделать линейное пространство:

равные ковекторы: $f = g \Longleftrightarrow \langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle\, \forall x \in \mathcal{L}$
сумма ковекторов: $h := f + g \Longleftrightarrow \langle h, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle$, линейность h проверяется элементарно
произведение ковектора на число: $h := \alpha f$, линейность опять же очевидна
нулевой ковектор: $\langle \Theta^*, x\rangle = 0,$ проверим линейность: $\langle \Theta^*, \alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^n x_n\rangle = 0 = \alpha^1 \langle \Theta^*, x_1\rangle + \dots + \alpha^n \langle \Theta^*, x_n\rangle$
противоположный ковектор: $f' := (-1)f$, проверяем: $\langle f, x\rangle + \langle f', x\rangle = -\langle f, x\rangle + \langle f, x\rangle = 0 = \langle \Theta^*, x\rangle = \langle f' + f, x\rangle$

Аксиомы линейного пространства выполняются потому, что это банально числа: они вытекают из этих же аксиом для чисел.