

Tue Mar 18 09:02:33 MSK 2025

$A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ - линейный оператор

$\ker A := \{x \in \mathcal{L}_1 : A(x) = \theta_2\} \subseteq \mathcal{L}_1$

$\operatorname{im} A := \{y \in \mathcal{L}_2 : \exists x \in \mathcal{L}_1, y = A(x)\} \subseteq \mathcal{L}_2$

Теорема: $\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}_1$

Доказательство: пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ - базис в $\ker A$, дополняем его до базиса $\mathcal{L}_1$: $\left\{ e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E^+} \right\}$

Рассмотрим $Y^+ := \{A(E^+)\} \subset \operatorname{im} A$. Докажем полноту: $y \in \operatorname{im} A \implies \exists x \in \mathcal{L}_1, y = A(x) \implies x = \underbrace{\sum_{j=1}^m x^j e_j}_{\in \ker A} + \sum_{j=m+1}^n x^j e_j \implies y = A(x) = A\left(\sum_{j=1}^m x^j e_j\right) + A\left(\sum_{j=m+1}^n x^j e_j\right) = 0 + \sum_{j=m+1}^n x^j A(e_j)$.

получили разложение по семейству Y^+ . Докажем ЛН: $\sum_{j=m+1}^n \alpha^j A(e_j) = A\left(\underbrace{\sum_{j=m+1}^n \alpha^j e_j}_{\in \ker A}\right) = \theta_2$;

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha^j e_j = \sum_{j=1}^m \beta^j e_j \implies \sum_{j=1}^m \alpha^j e_j - \sum_{j=m+1}^n \beta^j e_j = \theta_1 \iff \alpha^1 = \dots = \alpha^m = \beta^{m+1} = \dots = \beta^n = 0 \implies$$

$$\dim \operatorname{im} A = n - m$$

$$m = \dim \ker A, n = \dim \mathcal{L}_1$$

Матрица линейного оператора

$A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$; E : базис в $\mathcal{L}_1$

$\forall x \in \mathcal{L}_1 : A(x) = A(x^j \cdot e_j) = x^j A(e_j)$

$A : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, E$: Базис $\mathcal{L}$

$$A(E) \in \mathcal{L}, A(e_j) = a_{j,k}^k e_k; \quad (A(e_1) \dots A(e_n)) = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} - \text{это называется матрицей}$$

оператора в базисе E , обозначается A_E (с индексом внизу)

Как меняется матрица оператора при переходе к новому базису?

$$A : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \text{ базисы } E, E'; e_{i'} = c_{i'}^i e_i; A_E = (a_k^j)_n^n, A_{E'} = (a_{k'}^{j'})_{n'}^{n'} \\ A(e_{j'}) = a_{j',k'}^{k'} e_{k'} = a_{j',k'}^{k'} c_{k'}^k e_k = A(c_{j'}^j e_j) = c_{j'}^j A(e_j) = c_{j'}^j a_j^k e_k \implies a_{j',k'}^{k'} c_{k'}^k = c_{j'}^j a_j^k \\ \{C\}_{k'}^k \{A_{E'}\}_{j'}^{k'} = \{A_E\}_j^k \{C\}_{j'}^j \implies \{C \cdot A_{E'}\}_{j'}^k = \{C \cdot A_E\}_{j'}^k \implies$$

$$A_{E'} = C^{-1} \cdot A_E \cdot C$$

Множество линейных операторов

$A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ - сделаем его линейным пространством

1. Сложение: $C := A + B, C(x) = A(x) + B(x)$

$$C(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) + B(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 (A(x_1) + B(x_1)) + \alpha^2 (A(x_2) + B(x_2)) = \alpha^1 C(x_1) + \alpha^2 C(x_2)$$

2. Умножение: $C := \alpha A, C(x) = \alpha A(x)$

Тут доказательство простое

проверим 8 Аксиом линейного пространства:

1. Коммутативность: выполняется в силу того, что она выполняется для векторов линейного пространства
2. Все оставшиеся аксиомы: будут свойствовать из свойств линейного пространства, из которого действует линейный оператор
3. Нулевой оператор: Всему пространству задаёт нулевой вектор
4. Противоположный оператор: $A^- = (-1)A \implies A^- + A = \Theta$

Введём умножение операторов: $C := AB, C(x) = A(B(x))$. Линейность типа проверили.

Единичный оператор: $I : x \rightarrow x$

Обратный оператор: $A^{-1}(A) = I$

Матрица произведения операторов: $C(e_j) = A(B(e_j)) = A(b_j^m e_m) \implies c_j^k e_k = b_j^m a_m^k e_k \implies$
 $\implies$ - так же, как мы делали до этого - $C_E = A_E B_E$ в матричной форме. Можно доказать, что $(C^{-1})_E = C_E^{-1}$

Теорема об обратном операторе: Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Тогда

$$\exists A^{-1} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \iff$$

$$\iff \text{im } A = \mathcal{L} \iff$$

$$\iff \ker A = \theta$$

Это можно доказать циркулярно: $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$. Доказательство:

$$1 \implies 2 : \exists A^{-1} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) : \forall y \in \mathcal{L} \exists! x \in \mathcal{L} : y = A(x) \in \text{im } A \implies \text{im } A = \mathcal{L}$$

$$2 \implies 3 : \text{im } A = \mathcal{L}; \dim \ker A = \dim L - \dim \text{im } A = 0 \implies \ker A = \{\theta\}$$

$$3 \implies 1 : \ker A = \{\theta\} \implies (\dim \text{im } A = \dim \mathcal{L} \wedge \text{im } A \subset \mathcal{L}) \implies \text{im } A = \mathcal{L} \implies \forall y \in \mathcal{L}, \exists x \in \mathcal{L} : y = A(x).$$

$$\text{единственность: } y_0 \in \mathcal{L} \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L} : y_0 = A(x_1) = A(x_2), A(x_1 - x_2) = \theta \implies x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \implies x_1 = x_2$$

$$\text{линейность: } y_1, y_2 \in \mathcal{L} \exists! x_1, x_2 \in \mathcal{L}, y_1 = A(x_1), y_2 = A(x_2), x_1 = A^{-1}(y_1), x_2 = A^{-1}(y_2)$$

$$A^{-1}(\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = A^{-1}(A(\beta^1 x_1 + \beta^2 x_2)) = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 = \beta^1 A^{-1}(y_1) + \beta^2 A^{-1}(y_2)$$