Thu Mar 27 10:51:22 MSK 2025

задача на собственный вектор/собственное значение, пример

Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}), \mathcal{L}(\mathbb{K})$

Пусть $f(t)[a,b] : f'(a) = \lim\limits_{t \to a+0} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}, f'(b) = \lim\limits_{t \to a+0} \dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}, C^{(k)}$ - множество производных n-ого порядка $f(t)$ на $[a,b]$, пусть $C^{\infty} : f(t) \in C^{\infty}[a,b] : f(t) \in C^{(k)} \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L} := \left\{ f \in C^{\infty}[a,b], f^{(a)} = f^{(b)} = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ - утверждаем, что это линейное пространство, проверим:

1. $\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 \in C^{\infty}[a,b]$
2. $\alpha^1 f_1^{(k)}(a) + \alpha^2 f_2^{(k)}(a) = 0$, аналогично для b

Введём оператор: $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$. Проверим его:

1. $f \in \mathcal{L} : \dfrac{d^2 f}{dx}^2 \in C^{\infty}[a,b]$
2. $\dfrac{d^k}{dx^k} \dfrac{d^2 f}{dx^2}(a;b) = 0$
3. Линейность следует из правил дифференцирования

$Af = \lambda f_1, f \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0; \quad a := 0, b := \pi, f_n(x) := \sin \pi n x; f'' = -(\pi n)^2 \sin \pi n x; \lambda := (\pi n)^2$

о ч е н ь в а ж н а я л е м м а: Пусть $\mathcal{L}$ - лин. пр., в нём $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \{\Theta\}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \Theta$. Пусть E- базис в $\mathcal{U}$, F - базис в $\mathcal{V}$. Тогда семейство $\{E \cup F\}$ ЛН.

Док-во: [от противного]: Пусть $G := \{E \cup F\}, \gamma = \alpha \dots \beta$ ЛЗ. рассмотрим ЛК $\gamma^i g_i, \exists \gamma^i \neq 0$. Если $\forall \beta = 0 \implies \exists \alpha \neq 0 \implies E-$не базис. аналогично $\forall \alpha = 0 \implies \exists \beta \neq 0$. Полное противоречие((

Вывод: $E \cap F = \{\Theta\}$

д о к а з а н о

рассмотрим: $V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I). \forall x \in \ker(\dots) : (A - \lambda I) = \theta \implies Ax = \lambda x, V_\lambda(A)$ - {все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda\} \cup \{\theta\}$

Помним, что решение задачи на собственность можно свести к $\det(A_E - \lambda I) = 0$, где определитель - это многочлен степени $n := \dim \mathcal{L}$, у него n корней. Пусть у нас имеется 2 корня из поля $\mathbb{K}$. Построим 2 пространства: $V_{\lambda_1}(A), V_{\lambda_2}(A)$

Лемма 3: $V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \{\Theta\} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

Доказательство: пусть $x \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) \implies AX = \lambda_1 x = \lambda_2 x \implies [\lambda_1 \neq \lambda_2] \implies x = \theta$

$f(\lambda) = \det(A_E - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_{\lambda_1}} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_{\lambda_2}} \dots = (\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}} \cdot \psi(\lambda), \psi(\lambda_j) \neq 0$, где n_{λ_1} - **алгебраическая кратность** корня характеристического уравнения.

Пусть λ_j - корень уравнения $\in \mathbb{K}$; $A_E X_E = \lambda_j X_E \implies A e_j = \lambda_j e_j, e_j = V_{\lambda_j}(A) \neq \{\theta\}$

$P_{\lambda_j} := \dim V_{\lambda_j}(A)$ - **геометрическая кратность** собственного значения λ_j.

Лемма IV.: $n_{\lambda_j} \geq P_{\lambda_j}$

Доказательство: $V_{\lambda_j} \overset{def}{=} \ker(A - \lambda_j I) \neq \{\theta\}$

Пусть $V_{\lambda_j} = L(E')$ - линейная оболочка базиса. Дополняем его до базиса $\mathcal{L} = L(E' \cup E")$. Тогда $Ae_1' = \lambda_j e_1, Ae_1" = \lambda_j e_1"$. Матрца оператора: $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \lambda_j & & \vdots & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \dots \\ 0 & \dots & & \lambda_j & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & D_E \\ 0 & C_E \end{pmatrix} \implies$

$$\implies A_E - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & D_E \\ \vdots & & \lambda_j - \lambda & & \\ & 0 & & & C_e \end{pmatrix}, \text{det}\, A_E - \lambda I = \begin{vmatrix} \lambda_j - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j - \lambda \end{vmatrix} \text{det}(C_E - \lambda I_{n-m}),$$

$m = P_{\lambda_j}$ - геометрическая кратность

det$(A_e - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{P_{\lambda_i}}$ det$(C_E + \lambda I_{n-m}) \implies (\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}} \psi(\lambda_j) = (\lambda - \lambda_j)^{P_{\lambda_j}}$ det$(C_E - \lambda I_{n-m}) \implies$

$$\implies \frac{(\lambda - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}}}{(\lambda - \lambda_j)^{P_{\lambda_j}}} = \frac{\text{det}(C_E - \lambda I_{n-m})}{\psi(\lambda)}$$

Случай 1: $n_{\lambda_j} < P_{\lambda_j}$: не может быть (только я не понял, почему??? что-то там куда-то там стремится...)

Случай 2: $n_{\lambda_j} \geq P_{\lambda_j}$ - реализуется

Теорема 1. Для того, чтобы матрица оператора имела в некотором базисе имела диагоналный вид, необходимо и достаточно, чтобы базис состоял из собственных векторов оператора.

Доказательство: 1. пусть $\mathcal{L}(E), Ae_j = \lambda_j e_j. A_e = (A(e_1), \dots, A(e_m)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$ - диагональна.

2. Пусть Матрица диагональна; тогда $A(e_j) = \lambda_j e_j, \dots$

Теорема 2. Для того, чтобы о уператора $A \exists$ собственный базис $\iff$ чтобы были выполнены свойства: характеристический многочлен $f(\lambda)$ раскладывался на линейные множители в поле $\mathbb{K}$ и $(P_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}) \forall i$

Пояснение: разложение на линейные множители: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ - раскладывается в $\mathbb{C}$, но не в $\mathbb{R}$. т.е. разложение: $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m), \forall \lambda_m \in \mathbb{K}$

Доказательство: 1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ - корни характеристического многочлена, попарно различны. Рассмотрим $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$: все они тоже попарно не пересекаются. у нас сущуствует базис $\iff \sum\limits_{i=1}^{m}$ dim $V_{\lambda_i} =$ dim $\mathcal{L}$. $\sum\limits_{i=1}^{m}$ dim $V_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{m} P_{\lambda_j} \leq \sum\limits_{i=1}^{m} n_{\lambda_i} = n$. Теперь проверим, что суммы равны, от противного: $p_{\lambda_i} < n_{\lambda_i}$: $\sum\limits_{i=1}^{m} P_{\lambda_j} = \sum\limits_{i}$... он решил резко закончить лекцию и концовку я не понял.