

Билинейные формы

Определение: числовая функция 2 аргументов $B(x, y) \in \mathbb{K}; x, y \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$ называется билинейной формой, если она обладает свойством линейности по обоим аргументам.

Пример: пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, B(X, Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в $\mathcal{L}$; $x = x^j e_j; y = y^k e_k \Rightarrow B(x, y) = B(x^j e_j, y^k e_k) = x^j y^k B(e_j, e_k)$
 $\{B(e_j, e_k)\}_{j,k=\overline{1,n}}$ - матрица билинейной формы.

Введём обозначение $b_{jk} := B(e_j, e_k) \Rightarrow B(x, y) = x^j y^k b_{jk} = *$

$$b_{jk} y^k = (b_{j1} \dots b_{jn}) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = B_j Y_e$$

$$x^j b_{jk} y^k = x^j B_j Y_e = (x^1 \dots x^n) \begin{pmatrix} B_1 & Y_e \\ \vdots & \vdots \\ B_n & Y_e \end{pmatrix}; \quad B_e Y_e = \left\| \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \right\| \|Y_e\| = \begin{pmatrix} B_1 & Y_e \\ \vdots & \vdots \\ B_n & Y_e \end{pmatrix}$$

$$* = (x^1, \dots, x^n) B_e Y_e \Rightarrow$$

$$B(x, y) = X_e^T B_e Y_e$$

При переходе к новому базису: $E, E', E' = EC, e_{j'} = c_{j'}^j e_j$

$$b_{j'k'} = B(e_{j'}, e_{k'}) = B(c_{j'}^j e_j, c_{k'}^k e_k) = c_{j'}^j c_{k'}^k B(e_j, e_k) = c_{j'}^j c_{k'}^k b_{jk}$$

$$b_{j'k'} = \{B_{e'}\}_{k'}^{j'} = \{C\}_{j'}^j \{C\}_{k'}^k \{B_e\}_k^j = \{C\}_{j'}^j \underbrace{\{B_e\}_k^j \{C\}_{k'}^k}_{\{B_e \cdot C\}_{k'}^j} = \{C^T\}_{j'}^j \{B_e \cdot C\}_{k'}^j = \{C^T B_e C\}_{k'}^{j'}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C$$

$$A_{e'} = C^{-1} A_e C, A_{e'} - \text{оператор (пр. лекции)}$$

Замечание: преобразование базиса: $E' = EC$. Другой способ записи: $x = EX_e = E'X_{e'} \Rightarrow X_e = C X_{e'}$. Ещё один, новый способ: $X_e = X_{e'}, \forall x = EX_e = E'X_{e'}, ECX_{e'} = E'X_{e'} \Rightarrow \underbrace{[EC - E']}_{\hat{E}} X_{e'} = 0$

$$\theta \Rightarrow \hat{E} X_{e'} = \theta \quad \forall X_{e'} \in \mathbb{K}^{n \times 1}.$$

$$x^1 \bar{e}_1 + \dots + x^n \bar{e}_n = \theta \Rightarrow \hat{E} = (\theta, \dots) \Rightarrow EC = E'$$

(Анти)симметричные билинейные формы

Для любой формы справедливо: $B(x, y) = \frac{B(x, y) + B(y, x)}{2} + \frac{B(x, y) - B(y, x)}{2}$

<Начиная отсюда я начал жёстко засыпать и записывать без доказательств>

<Заранее прошу прощения у себя, готовящегося к сессии>

Определение: билинейная форма симметричная, если $B(x, y) = B(y, x)$ **Определение:** билинейная форма антисимметричная, если $B(x, y) = -B(y, x)$

Любая форма разложима на ЛК симметричной и антисимметричной $B_{s1}(x, y) + B_{a1}(y, x) =$ второе такое же

Ранг матрицы, инварианты билинейных форм

$$C = AB \Rightarrow \text{rk } C \leq \text{rk } B$$

$$B_e = (C^T)^{-1} B_{e'} C^{-1} \wedge B_{e'} = C^T B_e C \Rightarrow \text{rk } B_e = \text{rk } B_{e'}$$

$$\text{sgn det } B_e = \text{sgn det } B_{e'}$$

Квадратичные формы

$$Q(x) = B(x, x) = X_e^T Q_e X_e, \text{ или } q_{ij} x^i x^j$$

Наиболее простой вид: $\sum_i x_j(x^j)$

Теорема Лагранжа: у любой квадратичной формы $\exists$ базис, в котором она имеет канонический (наиболее простой) вид.