Thu Apr 10 10:57:38 MSK 2025

я пропустил несколько лекций по болезни

евклидовы пространства

свойства скалярного произведения: очереди в кофепорте убивают... а в сфа холодно...
Неравенство Коши-Буряковского: $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$
Норма вектора: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Свойства:

1. $\|x\| \ge 0; \|x\| = 0 \iff x = \theta$
2. $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$. Доказательство:
   $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y)^2 = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\| + \|y\| + 2(x, y) \le \|x\| + \|y\| + 2\langle(x, y)\rangle \le \|x\| + \|y\| + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Метрический тензор - матрица билинейной формы: $(x, y) = G(x, y) \implies G(x, y) = X_e^T G_e Y_e$
$\{G_e\}_k^j = (G(e_j, e_k))$

Лемма 1: det $G_e > 0$

$G(x, x) = X_e^T G_e X_e > 0 \quad \forall x \ne \theta$

Т.к. G - положительно определённая форма, то все её угловые миноры > 0, значит, det $G > 0$

cos $\varphi := \dfrac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$

унитазное пространство

Полуторолинейная форма $G(x, y)$: Пусть $\mathcal{L}$ - комплексное линейное пространство. Числовая функция $G(x, y)$ называется полуторолинейной формой, если выполнены следующие 2 свойства:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ (комплексно сопряжённое число)
2. $G(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$

Свойства полуторолинейных форм:

1. $G(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \bar{\beta}^1 G(x, y_1) + \bar{\beta}^2 G(x, y_2)$ - антилинейность. Доказывается через перестановку аргументов
2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$: доказывается по перестановку аргументов

определение: полуторолинейная форма $G(x, y)$ называется положительно определённой, если $G(x, x) > 0 \quad \forall x \ne \theta$

Определение унитазного пространства: унитазным пространством называется комплексное линейное пространство, на котором введена положительно определённая полуторолинейная форма... Скибиди доп yes yes

Пример: Введём Функцию Комплексного Переменного: $f(x \in \mathbb{C}) = f_1(x) + i f_2(x); f_1, f_2 \in \mathbb{R}$; $f \in \mathbb{C}[0, 1] \iff f_1, f_2 \in \mathbb{R}[0, 1]$ - непрерывны. поэтому это линейное пространство. введём форму: $G(f, g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Линейна по первому аргументу как обычный интеграл по риману; переставим аргументы: $G(g, f) = \int_0^1 g(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 \overline{\overline{f(x)}g(x)}dx = \overline{\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx} = \overline{G(f, g)}$. Ну, конечно, мы не слишком строго это доказали, но по сути это доказывается через суммы Дарбу.

$G(f,f) = \int_0^1 f(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \quad (=0 \iff f=0)$ - ура она положительно определённая

Пусть $G(x,y)$ - полутороличейная форма, пусть E - базис нашего комплексного линейного пространства; раскладываем: $G(x^ie_i, y^je_j) = x^i\cdot\overline{y^j}\cdot G(e_i,e_j) = x^i\cdot\overline{y^j}\cdot g_{ij} = X_e^T\cdot G_e\cdot\overline{Y_e}$

Лемма 2: $\det G_e \neq 0$

Докажем от противного: $\det G_e = \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & \dots & (e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n,e_1) & \dots & (e_n,e_n) \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & \dots & (e_n,e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1,e_n) & \dots & (e_n,e_n) \end{vmatrix} = 0 \implies$

$\implies \alpha^1\begin{pmatrix}(e_1,e_1)\\ \vdots \\ (e_1,e_n)\end{pmatrix} + \dots + \alpha^n\begin{pmatrix}(e_n,e_1)\\ \vdots \\ (e_n,e_n)\end{pmatrix} = 0, (\alpha^1,\dots,\alpha^n)\neq 0 \implies \begin{pmatrix}(\alpha^1e_1,e_1)\\ \vdots \\ (\alpha^1e_1,e_n)\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}(\alpha^ne_n,e_1)\\ \vdots \\ (\alpha^ne_n,e_n)\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}(\alpha^1e_1+\dots+\alpha^ne_n,e_1)\\ \vdots \\ (\alpha^1e_1+\dots+\alpha^ne_n,e_n)\end{pmatrix} = 0 \overset{x:=\alpha^ie_i}{=} \begin{pmatrix}(x,e_1)\\ \vdots \\ (x,e_n)\end{pmatrix} = 0; \implies \overline{\alpha^1}(x,e_1)+\dots+\overline{\alpha^n}(x,e_n) = 0 =$
$= (x,\alpha^1e_1)+\dots+(x,\alpha^ne_n) = (x,\alpha^1e_1+\dots+\alpha^ne_n) = (x,x) = 0 \implies x=0 \implies \alpha^ie_i = 0$ - значит, E - не базис, противоречие: $\det G_e \neq 0$

Важно: все дальнейшие результаты будут справедливы и для евклидового, и для унитарного пространства, такие результаты будем помечать как $\varepsilon(u)$

Норма в унитарном пространстве: $\|x\| = \sqrt{G(x,x)}$

Неравенство Коши-Буниковского (u): $|G(x,y)|^2 \le G(x,x)G(y,y)$.

Доказательство: $(\alpha x+y, \alpha x+y) \ge 0 = \alpha(x,y)+\overline{\alpha}(y,x)+\alpha\overline{\alpha}(x,x)+(y,y) = \left[\alpha := -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}\right] =$

$= \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)^2}(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \underbrace{\frac{(x,y)}{(x,x)}(y,x)}_{=|(x,y)|^2/(x,x)} + (y,y) \ge 0 \implies \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} \le (y,y)$ - что по сути и есть неравенство

Свойства нормы:

1. $\|x\| \ge 0 \quad (\|x\| = 0 \iff x = \theta)$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$. Доказательство: $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x,\alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = \sqrt{\alpha^2}\,\|x\| = |\alpha|\,\|x\|$
3. $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$. Доказательство: $\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y) = \|x\|^2+\|y\|^2+\underbrace{(x,y)+\overline{(x,y)}}_{=2\Re(x,y)} \le \|x\|^2+\|y\|^2+2\,|\Re(x,y)| \le \|x\|^2+\|y\|^2+2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2 \implies$

   $\implies \|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$, доказано ■

Ортогональность: в следующий раз :000