Tue Apr 15 09:04:18 MSK 2025

ортогональность

1. ОНБ - ортонормированный базис

определение: $a \perp b \iff (a,b) = 0$
$\mathcal{Q} \perp \mathcal{P} : \forall a \in \mathcal{Q}, \forall b \in \mathcal{P} : (a,b) = 0$
лемма 1: $x \perp x_j (j \in \overline{1,m}) \implies x \perp \mathcal{L}(x_1, \dots, x_m)$
лемма 2: $x \perp e_j (j \in \overline{1,m}, \{e_1, \dots, e_m\} -$ базис в $\mathcal{L}) \implies x = \theta$
Доказательство: $x = \alpha^j e_j; \quad (e_j, x) = 0 \forall j; \quad \alpha^j (e_j, x) = 0 \implies (\alpha^j e_j, x) = 0 \implies (x,x) = 0 \implies x = \theta$
■
лемма 3: $e_j \neq \theta \quad (j = \overline{1,m}) \wedge (e_j, e_k) = 0 \quad (j \neq k) \implies \{e_1, \dots, e_m\}$ - линейно независимо.
Доказательство: пусть $\alpha^j e_j = \theta, (\alpha^j e_j, e_k) = 0 \implies \underline{a^j (e_j, e_k) = 0} \iff a_j = 0 \quad \forall j = \overline{1,m}$ - значит, ЛН
определение ОНБ: $\{e_1, \dots, e_m\} : (e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j,k = \overline{1,m}$
теорема 1: $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ОНБ $\implies x = \sum_j^n (x_j, e_j) e_j, \quad \|x\| = \sum_j^n |(x_j, e_j)|^2$ (формула Гиббса и равенство Парсеваля соотв.)

Доказательство: $x = x^j e_j \implies (x_j, e_k) = (x^j e_j, e_k) = x^j (e_j, e_k) = x_k \implies x = \sum_j^n (x^j, e^j) e_j$

$$\|x\|^2 = (x,x) = \left(\sum_j^k (x^j, e^j) e_j, \sum_j^n (x^j, e^k) e_k \right) = \sum_j^n (x^j, e^j) \left(e_j, \sum_j^n (x^j, e^k) e_k \right) = \sum_j^n \sum_j^n (x^j, e^j) \overline{(x^j, e^k)} \underbrace{(e_j, e_k)}_{=\delta_{jk}} =$$
$$= \sum_j^n (x^j, e^j) \overline{(x^j, e^j)} = \sum_j^n \left| (x^j, e^j) \right|^2$$

Пусть имеется базис E, E' - ОНБ: $E' = EC$. Какие ограничения на эту матрыцу? $EC = \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}$, $\det C \neq 0 \implies \{a_1, \dots, a_n\}$ - тоже базис (не обязательно ОНБ). Доказательство будет на консультации перед экзаменом. А что делать, чтобы базис A был ОНБ?
Лемма 4: Ортонормаированная матрица обладает свойством: $C^T \overline{C} = \mathbf{I}$
Доказательство: пусть $x = EX_e = E'X_{e'}; y = EY_e = E'Y_{e'}; (x,y) = G(x,y) = X_e^T G_e \overline{Y}_e = X_{e'}^T G_{e'} \overline{Y}_{e'}$, где $\{G_e\}_k^j = G(e_j, e_k)$, поэтому $(e_j, e_k) = \delta_{jk}; \quad (e_{j'}, e_{k'}) = \delta j'k' \implies G_e = G_{e'} = \mathbf{I} \implies X_e^T \overline{Y}_e = X_{e'}^T \overline{Y}_{e'} \implies$
$\implies X_{e'}^T C^T \overline{C} \overline{Y}_{e'} = X_{e'}^T \overline{Y}_{e'} \implies X_{e'}^T \left[C^T \overline{C} - \mathbf{I} \right] \overline{Y}_{e'} \quad \forall X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{K}^{n \times 1} = 0$. Пока что не будем доказывать, докажем на консультации, что то, что внутри квадратных скобках равно нулю, поэтому $C^T \overline{C} = \mathbf{I}$
задача о перпендикуляре пусть имеется ортонормированное семейство E, содержится в евклидовом или унитарном пространстве $\mathcal{L}$, $e_j \neq \theta$. Пусть $\exists x \notin L(e_1, \dots, e_m), x \in \mathcal{L}. \quad x = y + z$, где $y \in L(E), z \perp L(E)$. Другими словами, надо представить x как сумму перпендикуляра к линейной оболочке и чего-то из линейной оболочке. $y = x^j e_j; z := x - x^j e_j$. Я не понял, почему, но $(z, e_k) = 0 \quad \forall k \in \overline{1,m}$, поэтому $(x - x^j e_j, e_k) = 0; (x_j, e_k) = \sum \lambda^j (e_j, e_k) \implies (x_j, e_k) = \lambda^k (e_k, e_k) \implies \lambda^k = \dfrac{(x_j, e_k)}{(e_k, e_k)}$.
теорема Грама-Шмидта: в любом евклидовом или унитарном пространстве $\exists$ ОНБ.
Доказательство: Пусть $\mathcal{L} = \varepsilon \vee \mathcal{L} = \mathcal{U}$. Пусть $E = (e_1, \dots, e_n). e_{1'} := e_1 \implies L(e_1) = L(e_{1'})$. Предположим, что мы построили ортогональное семейство $\{e_{1'}, \dots, e_{m'}\} \in L(e_1, \dots, e_m)$; $L(e_{1'}, \dots, e_{m'}) = L(e_1, \dots, e_m)$. Теперь $e_{m'+1} := e_{m+1} - \sum_{j=1}^{m'} \dfrac{(e_{m+1}, e_{j'})}{(e_{j'}, e_{j'})}$. По построению $e_{m'+1} \perp L(e_1, \dots, e_m)$ $e_{m'+1} \in L(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}) = L(e_{1'}, \dots, e_{m'}, e_{m+1})$. То есть наше новое дополненное семейство - базис в "дополненной" ЛО. Вывод: $\{e_{1'}, \dots, e_{m'}, e_{m'+1}\} -$ базис в $L(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$. Таким образом на n шагов строим базис в $\mathcal{L}$. Таким образом на n шагов строим ортогональный базис в $\mathcal{L}$. Чтобы построить ОНБ, просто нормируем базис. ГГ. ■

Линейные операторы в евклидовых и унитазных пространствах

сопоряжённый оператор

Пусть $A \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \quad (\mathcal{L} = \varepsilon \vee \mathcal{L} = \mathcal{U})$

определение: сопряжённый оператор: $A^*(\mathcal{L} \to \mathcal{L}) : (x, A^*y) = (Ax, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$

Пример: сопряжённый оператоор **I*** равен **I**. С нулевым оператором то же самое. Теперь посмотрим на линейный оператор векторного произведения: $A\vec{x} := [\vec{a}, \vec{x}]$. $(A\vec{x}, \vec{y}) = ([\vec{a}, \vec{x}], \vec{y}) = \langle \vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{a} \rangle = (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{a}]) = (\vec{x}, -[\vec{a}, \vec{y}]) = (\vec{x}, -A\vec{y}) \implies A^* = -A$