

1 ФНП

1.1 Множества точек

Определения:

Точка: Упорядоченная совокупность вещ. чисел $(x_1, \dots, x_n)$; x_i называется координатами точки

M -мерное координатное пр-во: Совокупность всех точек с M координатами

Множество точек: Любая совокупность точек M -мерного коорд. пр-ва

Расстояние между точками: $M_1(x_1^1, \dots, x_n^1), M_2(x_1^2, \dots, x_n^2) : \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^1 - x_i^2)^2}$

M -мерное Евклидово пр-во: Такое пр-во, в котором расстояние между точками введено по прошлой формуле $\mathbb{R}^m$

Начало координат: Точка $O(0, 0, \dots, 0)$

Открытый шар: Множество точек $\{M \in \mathbb{R}^m | \rho(M, A) < R, A(a_1, \dots, a_m), R \in \mathbb{R}^+\}$. A - центр, R - радиус

ε -окрестность A : $\{M \in \mathbb{R}^m | \rho(M, A) < \varepsilon\} =: \Omega_\varepsilon(A)$

Прямоугольная окрестность $A(a_1, \dots, a_m)$: $\{M \in \mathbb{R}^m | |x_i - a_i| < c_i (c_i > 0 \forall i)\}$

Внутренняя A точка мн-ва $\{M\}$: $\exists \Omega_\varepsilon(A) \in \{M\}$

Граничная точка A мн-ва $\{M\}$: в $\forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\}, \exists M' \notin \{M\}$

Изолированная точка A мн-ва $\{M\}$: $\exists \Omega_\varepsilon(A) : \nexists (M \neq A) \in \Omega$ (есть окрестность, в которой нет точек)

Предельная точка A мн-ва $\{M\}$: $\forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\}$ (в любой окрестности есть точки из мн-ва)

Граница $\{M\}$: Совокупность всех граничных точек мн-ва $\{M\}$

Замкнутое множество: такое мн-во, которое содержит все свои граничные точки

Открытое множество: Все точки множества внутренние

M ограничено, если оно целиком содержится в некотором шаре

$(\exists R > 0, A \in \mathbb{R}^m : \forall M \in \{M\} : \rho(M, A) < R)$

Непрерывная кривая в $\mathbb{R}^m$: мн-во точек $\left\{ M(x_1, \dots, x_m) | x_i = \overset{\text{непр.}}{\varphi_i(t)}, t \in [\alpha, \beta] \right\}$

Концы кривой: точки $[A(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)), B(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))]$

Кривая замкнутая, если $A = B$

Прямая в по-ве $\mathbb{R}^m$: мн-во $\left\{ M_i(x_1, \dots, x_m) | x_i = \overset{\circ}{x}_i + a_i t, t \in \mathbb{R} \right\}$

Связное мн-во: $\forall M_1, M_2 \in \{M\}$ можно соединить непр. кривой, лежащей в $\{M\}$

По определению ТОЛЬКО $\mathbb{R}^m, \emptyset$ являются и открытыми, и замкнутыми

Пример: $\{M(x_1, \dots, x_n) | \forall i \in \overline{1, m} x_i \in \mathbb{Q}, |x_i| < 1\}$

$\forall M \in \{M\} \forall \Omega_\varepsilon(M)$ содержит точки с иррац коорд-ми, все эти точки так же являются граничными

То есть граничные точки и ВСЕ те, которые принадлежат множеству. и ВСЕ те, которые лежат "внутри куба", т.е. граница $>$ мн-ва

Утверждение: Любая внутренняя точка мн-ва является предельной

Док-во: Дано: $\exists \Omega_{\varepsilon_0}(A) \subset \{M\}$, Доказать: $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \Omega_\varepsilon(A)$

Для $\varepsilon > \varepsilon_0 : \forall M \in \Omega_{\varepsilon_0}(A) \in \{M\}$

Для $\varepsilon < \varepsilon_0 : \Omega_\varepsilon(A) \subset \Omega_{\varepsilon_0}(A) \subset \{M\} \implies \forall M \in \Omega_\varepsilon(A) \in \{M\}$

Утверждение: Любая граничная точка множества является либо предельной, либо изолированной

1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Дано: } \forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\}, \exists M' \notin \{M\} (M, M' \in \Omega_\varepsilon(A)) \\ \text{Отрицание изолированной: } \forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\} (M \neq A) \end{array} \right\} \implies \forall \Omega_\varepsilon(A) \exists M \in \{M\} \implies \implies A - \text{пред. точка}$

2. Если $\exists \Omega_\varepsilon(A), \exists ! A \in \{M\}$, то A - изолированная

Очень важное следствие: Замкнутое мн-во содержит все свои предельные точки

1.2 Посл-ти точек в $\mathbb{R}^m$

Определения:

Если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие точка $M_n \in \mathbb{R}^m$, то это посл-ть точек

Посл-ть точек ограничена, если $\exists R > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \rho(M, 0) < R$

Лемма: Чтобы посл-ть была ограниченной $\iff$ чтобы были ограничены посл-ти координат

Док-во:

1. Достаточность: $\{x_i^n\}$ огр.: $\exists R^n > 0 : \forall n |x_i^n| \leq \frac{R}{\sqrt{m}} \implies \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{R^2}{m}} = R$