Лемма о координатной ограниченности: Для того, чтобы последовательносто $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$ была ограничена $\iff$, чтобы были ограничены посл-ти координат

Необходимость: если ограничена, то координаты ограничены.

Дано: $\exists R > 0 : \forall n \rho(0, M_n) < R \implies \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < \implies |x_i| < R$, доказано

Примечание: $\forall m, \forall m'$ обозначают "все координаты"
А теперь определения и леммы:

- $A = \lim_{n\to\infty} M_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n < N : \rho(M_n, A) < \varepsilon$
- Лемма: если $\{M_n\} \in \{M\}$ - замкнутое мн-во, $\{M_n\} \to A \implies A \in \{M\}$
  Док-во:
  1. $\exists n, M_n = A \implies A \in \{M\}$
  2. $\forall n\, M_n \neq A, \{M_n\} \to A \implies \forall \overset{\circ}{\Omega}_\varepsilon(A) \exists M_n \in \{M\}$; A - предельная точка $\{M\}$, а замкнутое мн-во содержит свои предельные точки
- Лемма о покоординатной сходимости: $\{M_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)\} \to A(a_1, \ldots, A_m) \iff \forall m' : \{x_{m'}^n\} \to a_{m'}$
  Доказательство достаточно простое :)
- Фундаментальная посл-ть $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : \rho(M_n, M_{n+p}) < \varepsilon$
- лемма о покоординатной фунд-сти: $\{M_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)\}$ - фунд. $\iff \forall m' : \{x_{m'}^n\}$ - фунд.
- Теорема $\{M_n\}$ сходится $\iff \{M_n\}$ фунд. Док-во:
  Достаточность: фунд $\implies$ сход; по лемме о координатной фунд-сти $\{x_i^n\}$ - фундаментальные числовые последовательности $\implies$ они сходятся. По лемме о координатной сход-сти $\{M_n\}$ сходится
- Подпоследовательность: пусть $\{M_n\} \in \mathbb{R}^m$, выберем $\{K_n\} \in \mathbb{N}, \forall n : k_n \geq n \wedge k_{n+1} > k_n, \forall n$. Тогда подпосл. - это M_{k_n}
- Лемма: Если $\{M_n\} \to A \implies \forall K_n : \{M_{K_n}\} \to A$. Доказательство:
  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : \rho(M_n, A) < \varepsilon;\ K_n > n > N \implies \rho(M_{K_n}, A) < \varepsilon$
- ТЕОРЕМА Больцано-Вейерштрасса: Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Доказательство:
  По лемме о коорд. огран-сти $\forall i \in \overline{1, m} \left\{\overset{n}{x}_i\right\}$ – огр.
  Выберем из $\left\{\overset{n}{x}_1\right\}$ сходящуюся $\left\{\overset{k_n^1}{x}_1\right\} \to a_1$.
  Рассмотрим $\left\{M_{k_n^1}\right\} \subset \{M_n\}, M_{k_n^1} = (\overset{k_n^1}{x}_1, \ldots, \overset{k_n^1}{x}_m)$ - ограничена, сходится к $A(a_1, \ldots, a_m)$
  выделим $\left\{\overset{k_n^2}{x}_1\right\} \subset \left\{\overset{k_n^1}{x}_1\right\} \to a_1$
  Рассмотрим $\left\{M_{k_n^2}\right\} \to A$, через m итерация $\left\{M_{K_n^m}\right\} \to A(a_1, \ldots, A_m)$
  По лемме о покоординатной сходимости: $\left\{M_{k_n^m}\right\} \to A$

$ 3. Понятие ФНП

Определения:

- Область в $\mathbb{R}^m$ - всякое открытое связное множество

- Если каждой точке в множестве $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$ поставлено в соответствие число $u \in \mathbb{R}^1$, то на множестве $\{M\}$ задана функция $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 = f(M)$
- Предел ФНП: пусть $f(M)$ опр. в области $\mathcal{D}$, A - пред. точка $\mathcal{D}$.
  по Коши: $(b = \lim_{M\to A} f(M)) \iff (\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall M \in \mathcal{D}, \rho(M, A) < \delta : |f(M) - b| < \varepsilon)$
  по Гейне: $(b = \lim_{N\to A} f(M)) \iff (\forall \{M_n\} \subset \mathcal{D}, \forall n\, M_n \neq A, \{M_n\} \to A : \{f(M_n)\} \to b)$
- Теорема: определения предела ФНП по Коши и по Гейне эквивалентны. Доказательство аналогично случаю функции 1 переменной.
  Пример 1: $U^I(M) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ - на осях равна нулю, везде кроме этого равна единице.
  $$\begin{cases} \{M_n^1\} = \left\{(\frac{1}{n}, 0)\right\} \to 0 \\ \{M_n^2\} = \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right\} \to 1 \end{cases}$$ - предела не существует
  $U^{II}(M)$: не существует на осях, везде равна единице - предел существует (тоже по гейне)
  Пример 2: Докажем, что Если $(x + y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y} = 0$, то $M(x, y) \to O(0, 0)$
  $$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta\, \forall M \in \mathbb{R}^2 \{ox, oy\}, 0 < \rho(M, 0) < \delta : |x + y| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \left|\sin\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$$
  $0 < \rho(M,)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |x| < \delta, |y| < \delta, |x + y| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \left|\sin\frac{1}{y}\right| < |x + y| < |x| + |y| < 2\delta \implies \delta = \frac{\varepsilon}{2}$
- Определение: $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 = f(M)$ удовлетворяет Критерию коши в точке M_0, если
  $$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall M_1, M_2 \in \overset{\circ}{\Omega}_\delta(M_0) : (\rho(M_1, M_0) < \delta \wedge \rho(M_2, M_0) < \delta \implies |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon)$$
  ЭТО НАДО ПЕРЕФОРМУЛИРОВАТЬ, ПОТОМУ ЧТО ЛЕВАШОВА ЗАПУТАЛАСЬ.
- Теорема о критерии Коши для функций:
  Чтобы существовал предел u в точке M_0, она должна удовлетворять критерию Коши в этой точке
- Определение: $f(M)$ бесконечно малая (БМ) в точке A, если $\lim_{M\to A} f(M) = 0$
- Определение: Пусть $f(M), g(M)$ БМ в точке A, тогда $f(M) = o(g(M))$, если $\lim_{M\to A} \frac{f(M)}{g(M)} = 0$