

Лекция 3

теоремы о БМ:

Если $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $f(M) \rightarrow 0, g(M) \rightarrow 0, \rho(M, M_0) \rightarrow 0$, то $\{f(M) \pm g(M)\} \rightarrow 0$

Если $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $f(M) \rightarrow 0, \rho(M, M_0) \rightarrow 0, g(M)$ огр., То $f(M) \cdot G(M) \rightarrow 0$

Если $f(M) \rightarrow 0$ при $\rho(M, M_0) \rightarrow 0$, то $\frac{1}{f(M)} \rightarrow \infty$

"Очень Важная Лемма":

Если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b$, то $f(M) = b + \alpha(\rho(M, M_0))$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\rho(M, M_0) \rightarrow 0$

Док-во:

Взять определение предела, написать, что $\alpha(\rho) = |f(M) - b|$, по сути гг

Лемма, обратная к "Очень Важной Лемме":

Если $f(M)$ представима в виде $f(M) = b + \alpha(\rho(M, M_0))$, где $\alpha \rightarrow 0$, тогда $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b$

Теоремы об арифметических операциях:

Пусть $f(M), g(M)$ определены в $\overset{\circ}{\Omega}(M_0)$, $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) =: a, \lim_{M \rightarrow M_0} =: b$. тогда

$$\bullet \exists \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm g(M) = a \pm b$$

$$\bullet \exists \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot g(M) = a \cdot b$$

$$\bullet \text{ И если } B \neq 0, \text{ то } \exists \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}$$

Примеры вычисления пределов:

$$\lim_{\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3\}} \frac{\sin xyz}{x} = \lim_{\{t \rightarrow 0, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3\}} yz \frac{\sin t}{t} = 6$$

иногда удобно перейти к полярным координатам:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = [x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \text{ значит, предел } \nexists$$

§ 4. Непрерывность ФНП.

Определение:

Пусть $f(M)$ определена на $\mathbb{M}$, M_0 - пред. точка $\mathbb{M}$

Тогда $f(M)$ непрерывна в M_0 , если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$

$$(\text{по Коши}) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \rho(M, M_0) < \delta : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_i - M_{0i})^2}$$

Пусть $\Delta x_i := x_i - \overset{\circ}{x}_i$, Тогда $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m), M(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$

По лемме о покоординатной сходимости: $M \rightarrow M_0 \iff \forall i = \overline{1, m} \Delta x_i \rightarrow 0 \iff \rho(M, M_0) \rightarrow 0$

$f(M)$ непр $\stackrel{\text{def}}{\iff} M \rightarrow M_0 \implies f(M) \rightarrow f(M_0)$;

$\Delta f = f(M) - f(M_0) \rightarrow 0$, если $\Delta x_i \rightarrow 0 (\forall i \in \overline{1, m})$ - разностная форма определения непрерывности!

Определение: $\Delta_i f := f(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_{i-1}, \overset{\circ}{x}_i + \Delta x_i, \overset{\circ}{x}_{i+1}, \dots, \overset{\circ}{x}_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_{i-1}, \overset{\circ}{x}_i, \overset{\circ}{x}_{i+1}, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$ - приращение вдоль координаты x_i

Определение: $f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна по координате x_i , если $\Delta_i f \rightarrow 0$ при $\Delta x_i \rightarrow 0$

Лемма: Если $f(x_1, \dots, x_m)$ непр. в $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$, то она непрерывна в этой точке по каждой координате (Это непосредственное следствие определения непрерывности и разностной формы).

Примечание: Обратное неверно! Непрерывность по каждой координате $\nrightarrow$ непрерывность в

$$\text{точке } \left(f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \right. \text{ т.к. предел в точке не существует } \left. \right)$$

Для непрерывных функций имеют место теоремы:

- об арифметических операциях с функциями

- О сохранении знака непрерывной функции:

$f(M) \leq 0 \quad (M \in \Omega(M_0))$. Тогда $\exists \Omega_1(M_0) \subseteq \Omega(M_0), \forall M \in \Omega_1 : f(M) \leq 0$

- О прохождении функции через любое промежуточное значение (на связном мн-ве $\mathcal{D}$):

$M_1, M_2 \in \mathcal{D}, u_1 := f(M_1), u_2 := f(M_2) \quad \forall u_0 \in [u_1, u_2]$ на $\forall$ кривой, соединяющей $M_1, M_2, \exists A : f(A) = u_0$

Доказательство: $\mathcal{D}$ - связное, кривая $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t)$, где $\varphi_i(t)$ непр. $\forall i \in \overline{1, m}, t \in [t_1, t_2]$

$u_1 = M_1(\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_m(t_1)), u_2 = [\text{аналогично}]. f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ - непрерывна, тогда $\exists t_a \in [t_1, t_2] :$

$f(\varphi_1(t_a), \dots, \varphi_m(t_a)) = u_0$ по теореме для одномерного случая.

- Непрерывность сложной функции: есть m функций k переменных: $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$, Они определены в $\Omega(A)$, непрерывны в $A(a_1, \dots, a_k)$. Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ определены в $\Omega(B) [B(\varphi_1(A), \dots, \varphi_m(A))]$ и непрерывны в B . Тогда $F(t_1, \dots, t_k) = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ непрерывны в точке A .

Доказательство: $f(x, y), x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$

По условию $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

По условию $\forall \delta > 0 \exists \gamma, \forall (u, v) \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \gamma :$

$$|x - x_0| = |\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \wedge |y - y_0| = |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

Тогда $\rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| < \varepsilon$

Запишем определение из того, что написано выше:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma, \forall u, v \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \gamma : |f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| < \varepsilon$$

Что является определением непрерывности сложной функции