Теорема: Достаточное условие дифференцируемости функции
Пусть $u = f(M)$ опр. в $\Omega(M_0)$. Докажем для $M(x,y), M_0(x_0,y_0)$ (2-мерный случай)
Пусть $\exists u'_x(M), u'_y(M), M \in \Omega_1(M_0)$, они же непрерывны в M_0, тогда $u = f(M)$ дифф-ма В точке M_0

Доказательство: Рассмотрим $\Delta u(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(M) - f(M') + f(M') - f(M_0)$
$f(M) - f(M') = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$ - считаем приращением функции x,где $y_0+\Delta y$ - параметр. По теореме о формуле Лагранжа $[[f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x, \theta \in [0,1]]]$
$f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x . f'_x$ непр. в $M_0 \implies \lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0} f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,y_0)$
По "очень важной лемме": $f'_x(x+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,y_0) + \alpha_1(\Delta x,\Delta y),$ где $\alpha \to 0$
Окончательно: $f(M) - f(M') = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x$
Рассмотрим $f(M') - f(M_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(X_0,y_0) \overset{\text{лагранж}}{=} f'_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \overset{\text{оч важ лемм}}{=}$
$= f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta y$

Тогда: $\Delta u = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$

Пример 1: $u(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, доопред. $u(0,0) = 0$

$$u'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x} = 0; \quad u'_y(0,0) = 0$$

В окресности $\overset{\circ}{\Omega}(0,0)$ работает таблица производных: $u'_x = 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

В полярных координатах: $\lim\limits_{\rho\to 0,\varphi\in[0,2\pi]}\left(2\rho\cos\varphi\sin\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{\rho\cos\varphi}{\rho}\cos\dfrac{1}{\rho}\right) \nexists$, значит, разрывна - достаточное условие не выполнено

Проверим по определению: $\lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\dfrac{u(\Delta x,\Delta y) - 0 - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$, значит, дифференцируема

Пример 2: $\begin{cases}1, xy \neq 0\\ 0, xy = 0\end{cases}$ Разрывна $\implies$ недифференцируема

$$u'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0) - u(0,0)}{\Delta x} = 0 = u'_y(0,0)$$
$$u'_x(0, y_0\neq 0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,y_0) - u(0,0)}{\Delta x} \nexists$$
$u'_x, u'_y(x_0\neq 0, y_0\neq 0) = 0$ (по работающей таблице производных)
Получилось, что u'_x, u'_y непрерывны в области определения

Теорема о дифф. сложной функции: Пусть $x\varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ дифф в $(u_0,v_0),\ x_0 = \varphi(u_0,v_0), y_0 = \psi(u_0,v_0)$, пусть $f(x,y)$ дифф в точке (x_0,y_0), тогда $F(u,v) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ дифф.

Док-во: $\begin{cases}\Delta x(u_0,v_0) = \varphi'_u(u_0,v_0)\Delta u + \varphi'_v(u_0,v_0)\Delta v + \alpha_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u + \alpha_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v\\ \Delta y(u_0,v_0) = \psi'_u(u_0,v_0)\Delta u + \psi'_v(u_0,v_0)\Delta v + \beta_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u + \beta_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v\end{cases}, \begin{cases}\alpha_1,\alpha_2 - \text{БМ}\\ \beta_1,\beta_2 - \text{БМ}\end{cases}$

$$\Delta z(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\underbrace{\Delta x}_{*} + f'_y(x_0,y_0)\underbrace{\Delta y}_{*} + \gamma_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \gamma_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

Подставим $*: \Delta z(x_0,y_0) =$
$f'_x(x_0,y_0)\varphi'_u(u_0,v_0)\Delta u + f'_y(x_0,y_0)\psi'_u(u_0,v_0)\Delta u + f'_x(x_0,y_0)\varphi'_v(u_0,v_0)\Delta v + f'_y(x_0,y_0)\psi'_v(u_0,v_0)\Delta v +$
$f'_x(x_0,y_0)\alpha_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u + f'_y(x_0,y_0)\beta'_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u + \gamma_1(\Delta x,\Delta y)\varphi'_u(u_0,v_0)\Delta u + \gamma_1(\Delta x,\Delta y)\alpha_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u +$
$\gamma_2(\Delta x,\Delta y)\psi'_u(u_0,v_0)\Delta u + \gamma_2(\Delta x,\Delta y)\beta_1(\Delta u,\Delta v)\Delta u + f'_x(x_0,y_0)\alpha_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v + f'_y(x_0,y_0)\beta'_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v +$
$\gamma_1(\Delta x,\Delta y)\varphi'_v(u_0,v_0)\Delta v + \gamma_1(\Delta x,\Delta y)\alpha_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v + \gamma_2(\Delta x,\Delta y)\psi'_v(u_0,v_0)\Delta v + \gamma_2(\Delta x,\Delta y)\beta_2(\Delta u,\Delta v)\Delta v$
Т.к. $\Delta u,\Delta v \to 0 : \Delta x,\Delta y \to 0, \gamma_{1,2} \to 0$, все функции дифференцируемы $\implies$ непрерывны $\implies$ ограничены: $F(u,v) = z(\varphi(u,v),\psi(u,v));\quad \begin{cases}F'_u(u_0,v_0) = f'_x\varphi'_u(u_0,v_0) + f'_y\psi'_u(u_0,v_0)\\ F'_v(u_0,v_0) = f'_x\varphi'_v(u_0,v_0) + f'_y\psi'_v(u_0,v_0)\end{cases}$

Общая формула: $f(\varphi_1(t_1,\dots),\dots) : \dfrac{\partial f}{\partial t_k} = \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi_i}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t_k}$