

Теоремы об арифметических операциях

Если $u = f(M), h = f(M)$ опр. $\in \Omega(M) \wedge$ дифф. в M , тогда $u \pm v, uv$ дифф. и верны равенства:

$$d(u \pm v) = du \pm dv \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$\text{Если } v \neq 0 \in \Omega(M) : d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Доказательство 1:

$$\Delta u(M) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \bar{o}(\rho); \quad \Delta v = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} \Delta x_i + \bar{o}(\rho)$$

$$\Delta u + \Delta v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \Delta x_i = f(x_1 + \Delta x_1, \dots) + g(x_1 + \Delta x_1, \dots) - f(\dots) - g(\dots) = \Delta(u + v) =$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial(u+v)}{\partial x_i} \Delta x_i + \bar{o}(\rho) - \text{значит, дифференцируемая. Пользуясь линейностью оператора дифференцирования}$$

$$\text{по 1 переменной, разбиваем на 2 суммы: } \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} \Delta x_i + \bar{o}(\rho) = du + dv$$

Докажем 2 и 3: $w := u(\dots)v(\dots)$ - сложная функция, дифференцируемая в $(u(M), v(M))$. По теореме о дифференцировании сложной функции и свойству инвариантности 1 дифференциала:

$$d(uv) = v du + u dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = u d\left(\frac{1}{v}\right) + \frac{1}{v} du = \frac{u dv - v du}{v^2}$$

Продолжаем параграф 6. Градиент.

Рассмотрим $u = f(M)$, дифф. в M_0 . На прямой L с направлением $\vec{l} \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha$$

Введём **Градиент**: $u(M_0) = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\} = \nabla u(M_0) \implies \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = (\nabla u(M_0) \cdot \vec{l})$, где l -

ЕДИНИЧНЫЙ вектор, а u **ДИФФЕРЕНЦИРУЕМА** в точке

Замечание 1: формула верна для любого $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$.

Замечание 2: направление градиента совпадает с направлением *максимальной скорости роста* функции. На этом основаны алгоритмы gradient descent.

Пример 1: $u = x^2 + y^2 + z^2 \quad L = \{1, 1, 1\} \quad M_0(1, 2, 3) \quad \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = ?$

$$\nabla u = \{2x, 2y, 2z\}; \quad l = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}; \quad \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 + 4 + 6) = 4\sqrt{3}$$

Пример 2: поле точечного заряда в точке $M_0(\vec{r}_0)$; $u = l \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$; $E = -\nabla u$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) =$$
$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \right\}$$

\$ 7. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть u дифф. в $\Omega(M)$, $\exists u'_{x_i}(M)$. если u'_{x_i} дифф. в M , то $\frac{\partial u'_x}{\partial x_k}$ - вторая частная производная u по

$x_i, x_k : \frac{d^2 u}{dx_i dx_k}$. Если $i \neq k$, то производная смешанная

Сейчас мы записываем примеры, но я этих примеров уже столько наreshался в первом семестре, что тошно...

Пример 2: $u = \begin{cases} -xy, & |y| > |x| \\ xy, & |y| \leq |x| \end{cases}$ - разрывна на прямых $y = \pm x$

$u'_x : y, -y, y, -y, u'_y : x, -x, x, -x$ в разных местах относ. прямых разрыва

$$u'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = 0 = u'_y$$

$\lim_{x, y \rightarrow 0} u'_x = 0 = \lim_{x, y \rightarrow 0} u'_y$ - выполнено достаточное условие дифференцируемости в $(0, 0)$ посчитаем вторые

частные производные:
$$\begin{cases} u''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u'_x(0, \Delta y) - u'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1 \\ u''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u'_x(\Delta x, 0) - u'_x(0, 0)}{\Delta x} = 1 \end{cases}$$

Во хуетаааа... :000