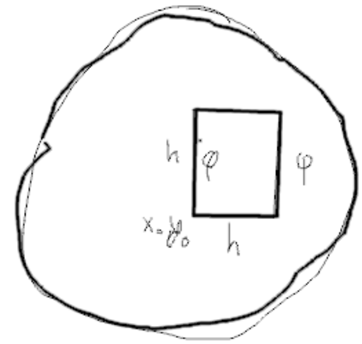
$7. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теорема: Пусть $u = f(x,y)$ имеет частные производные $f_{xy}", f_{yx}"$ в $\Omega(M_0)$ и непрерывны в M_0, тогда $f_{xy}"(M_0) = f_{yx}"(M_0)$

Доказательство: составим $F(h) = f(x_0+h, y_0+h) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0+h) - f(x_0+h, y_0)$. Введём $\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$. Тогда $F(h) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$. Введём $\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$. Тогда $F(h) = \psi(y_0+h) - \psi(y_0)$. φ, ψ дифференцируемы по условию, функции одной переменной, по теореме Лагранжа:



$$\begin{cases} F(h) &= \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(x_0+\theta_1 h)\cdot h = \\ &= f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+h)h - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)h = \\ &= f_{xy}"(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h)h^2 = (f_{xy}"(x_0,y_0) + \alpha_1(h))h^2 \quad (h\to 0) \\ F(h) &= f_{yx}"(x_0,y_0)h^2 + \alpha_2(h)h^2 \end{cases}$$

$\implies f_{xy}"(x_0,y_0) + \alpha_1(h) = f_{yx}"(x_0,y_0) + \alpha_2(h) \overset{h\to 0}{\implies}$
$\implies f_{xy}"(x_0,y_0) = f_{yx}"(x_0,y_0)$

Определение: Функция называется дважды дифференцируемой, если она дифф. в окресности M_0 и все её первые ЧП дифф. в точке

Теорема: если функция дважды дифференцируема в точке, то её смешанные вторые частные производные в этой точке равны

Доказательство: используя переход по Лагранжу в прошлом доказательстве: $F(h) = \underbrace{(f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0))}_{\Delta f_x} h$

$$\begin{cases} \Delta f'_x = f_{xx}"(M_0)\underbrace{\Delta x}_{=0} + f_{xy}"(M_0)\underbrace{\Delta y}_{=h} + \bar{o}(h) \\ \Delta f'_y = f_{yx}"(M_0)\underbrace{\Delta x}_{=h} + f_{yy}"(M_0)\underbrace{\Delta y}_{=0} + \bar{o}(h) \end{cases} \implies F(h) = (f_{xy}"\cdot h + \bar{o}(h))\,h = (f_{yx}"\cdot h + \bar{o}(h))\,h \overset{h\to 0}{\implies}$$

$\implies f_{xy}(M_0) = f_{yx}(M_0)$

Определение: n раз дифф. в точке M_0, если она $n-1$ раз дифф-ма в окресности M_0 и все её частные производные $n-1$-ого порядка дифференцируемы в точке M_0

Теорема: Если $u = f(M)$ n раз дифференцируема в точке M_0, то все её смешанные частные производные до n-ого порядка не зависят от порядка дифференцирования

Дифференциалы высших поряков

Пусть $u = f(M)$ дважды диффиренуируема в $M(x,y) \implies du = f'_x(M)dx = d'_y(M)dy$

1. Считаем, что dx, dy - фиксированные константы
2. Считаем, что $du(x,y)$ - функция переменных x, y
3. Вычислим $d^2u = d(du)$, считая, что dx, dy не меняются

$$d^2u = d(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy) = (f_{xx}"\delta x + f_{yy}"\delta y)dx + (f_{xy}"\delta x + f_{yx}"\delta y)dy \overset{\delta x = dx}{\equiv} f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + d_{yy}dy^2$$

Определение: Оператор - правило, по которому каждой функции из некоторого множества ставится в соответсвие другая функция (из того же или другого множества)

Операторы: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} : u \to u'_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} : u \to u'_y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} d = \dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy \\ d^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + 2\dfrac{d^2}{dxdy}dxdy \end{cases}$

По индукции верно: $\partial^n = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n$

Второй дифференциал сложной функции: $f(x(t_1, \dots, t_k), y(t_1, \dots, t_k))$
$df = f'_x dx + d'_y dy, dx = \frac{\partial x}{\partial t_i} dt^i, dy = \frac{\partial y}{\partial t_i} dt^i$ (обозначания Энштейна для ЛК)
$d^2 f = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x)dx + f'_x d^2 x + d(f'_y)dy + f'_y d^2 y = f_{xx}" dx^2 + 2f_{xy}" dxdy + f_{yy}" dy^2 + f'_x d^2 x + f'_y d^2 y$
- это свойство **не инвариантности** формулы второго дифференциала

Заметим, что если $x = \alpha^i t_i, y = \beta^i t_i$, то формула дифференциала всё-таки сохраняется для любого порядка (т.к. $d^n x = d^n y = 0$)

Формула тейлора для ФНП

Пусть $u = f(M)$ n раз дифференцируема в окресности $\Omega(M_0)$, тогда
$\exists N \in \Omega(M_0):$
$u(M) = u(M_0) + du(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 u(M_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n u(M_0) + \frac{1}{n+1}! d^{n+1} u(N)$

Доказательство: Уравнение отрезка MM_0 : $\begin{cases} x_1 = \mathring{x}_1 + \underbrace{(\overset{m}{x}_1 - \mathring{x}_1)}_{\Delta x_1} t \\ \vdots \\ x_n = \mathring{x}_n + \underbrace{(\overset{m}{x}_n - \mathring{x}_n)}_{\Delta x_n} t \end{cases}$

$u(M) = f(\mathring{x}_1 + (\overset{m}{x}_1 - \mathring{x}_1)t, \dots, \mathring{x}_n + (\overset{m}{x}_n - \mathring{x}_n)t)$, и применяя формулу для одномерного случая получаем формулу тейлора: $F(1) = F(0) + dF(0) + \dots, \quad F(1) = u(M) \quad F(0) = u(M_0)$
$dF(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0} \Delta x^i = df(M_0) \quad d^2 F(0) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{M_0} \Delta x^i\right)^2 = d^2 u(M_0)$