

Многочлен тейлора: $P_n(M) = u(M_0) + du|_{M_0} + \frac{1}{2}d^2u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^nu|_{M_0}$

Свойства остатка в разложении тейлора:

1. $P_n(M)$ - многочлен n -ого порядка от M
2. Все производные $P_n(M)$ вплоть до порядка n в точке M_0 совпадают с производными u в M_0

напомним **определение:** $u = f(M)$ n раз дифференцируема в $M_0 \iff$ дифференцируема в $\Omega(M_0)$ и все её частные производные $n - 1$ -ого порядка дифференцируемы в M_0

Теоремы о формуле тейлора:

1. Конечные приращения: 1 раз дифф-ма в M_0 (опр. в $\Omega(M_0)$) $\implies u(M) - u(M_0) = du(N)$
2. Остаточный член Пеано: $f(M)$ n раз дифференцируема в M_0 . Тогда для $M \in \Omega(M_0)$ верно $u(M) = P_n(M_0) + \bar{o}(\rho(M, M_0))$

Доказательство: По индукции. Если $n = 1$, $u = f(x, y)$ дифф-ма в M_0 , то её приращение $u(x, y) - u(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + \bar{o}(\rho)$

Для $n = 2$: $R_3(M) = u(M) - P_2(M) \implies R_3(M) - R_3(M_0) = \frac{\partial R_3}{\partial x}(N)\Delta x + \frac{\partial R_3}{\partial y}(N)\Delta y$, это выражение дифференцируемо 2 раза, поэтому $\frac{\partial R_3}{\partial x}(n) = \underbrace{P_1^{R_3}(M_0)}_{=0} + \bar{o}(\rho(N, M_0)) = \bar{o}(\rho(M, M_0)) \implies R_3(M) =$

$$\bar{o}(\rho)\Delta x + \bar{o}(\rho)\Delta y = \bar{o}(\rho^2)$$