

\$9. Локальный экстремум ФНП

Пусть $u = f(M)$ определена в области $\mathcal{D}$, $\dot{M}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) \in \mathcal{D}$

Локальный минимум: $\exists \Omega(M_0) \in \mathcal{D}, \forall M \in \overset{\circ}{\Omega}(\cdot)M_0 : f(M) > f(M_0)$

Локальный максимум: Аналогично

Локальный экстремум: Либо минимум, либо максимум

Необходимое условие $\exists$ локального экстремума: Если M_0 - точка локального экстремума $f(M)$ и $\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, то $\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = 0$

Доказательство: Дано, что $\exists \Omega(M_0), \forall M \in \overset{\circ}{\Omega}(M_0) [f(M) > f(M_0) \vee f(M) < f(M_0)]$. Это верно для точек M_k , на множестве точек $\{M_k\}$ рассмотрим функцию 1 переменной $\varphi(x_k) = f(\overset{\circ}{x}_1, \dots, x_k, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$. Т.к. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = \varphi'(\overset{\circ}{x}_k)$, и выполняется $\{f(M_k) < f(M_0) \vee f(M_k) > f(M_0)\} \iff$

$$\begin{aligned} &\iff \left\{ \varphi(x_k) < \varphi(\overset{\circ}{x}_k) \vee \varphi(x_k) > \varphi(\overset{\circ}{x}_k) \right\} \implies \overset{\circ}{x}_k - \text{локальный экстремум } \varphi(x_k), \text{ а } \left(\exists \varphi'(\overset{\circ}{x}_k) = 0 \right) \implies \\ &\implies \left(\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0 \right) \end{aligned}$$

Следствие: M_0 - локальный экстремум дифференцируемой функции $u = f(M)$, то её полный дифференциал равен нулю.

Пример 1: $u = x^2 + y^2$; $(0, 0)$ - точка локального минимума, $\begin{cases} u'_x(0, 0) = 2x = 0 \\ u'_y(0, 0) = 2y = 0 \end{cases}$

$$\text{Пример 2: } u = xy - \text{гиперболический парабабабабаабабабабабаб} \left\{ \begin{array}{l} u'_x(0,0) = u'_y(0,0) = 0 \\ u_x(x > 0, y > 0) > 0 \\ u_x(x > 0, y < 0) < 0 - \text{нет} \\ u_x(x < 0, y < 0) > 0 \\ u_x(x < 0, y > 0) < 0 \end{array} \right.$$

такой окрестности точки $(0, 0)$, в которой $u(0, 0)$ было бы максимальным или минимальным значением, то есть экстремума нет (но производные равны нулю!)

Квадратичная форма: $Q(X_1, \dots, X_m) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_iy_j$

Определённость квадратичной формулы:

1. Положительно определённая: $Q(x_1, \dots, x_m) > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$
2. Отрицательно определённая: $\forall (x_1, \dots, x_m) \neq (0, \dots, 0) : Q(x_1, \dots, x_m) < 0$
3. Знакоопределённая: Либо положительно, либо отрицательно определённая
4. Квазизнакоопределённая: знакоопределённая с нестрогим неравенством $\wedge \exists (x_1, \dots, x_m) \neq (0, \dots, 0) : Q(x_1, \dots, x_m) = 0$. Пример: $x^2 - 2xy + y^2$
5. Знакопеременная: всё остальное ($\exists X' := (x'_1, \dots, x'_n), X'' := (x''_1, \dots, x''_n); \quad X', X'' \neq (0, \dots, 0) : \operatorname{sgn} Q(X') \neq \operatorname{sgn} Q(X'')$)

Критерий Сильвестера: матрица квадратерской формы $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$. Составим угловые

миноры: $\delta_1 = |a_1^1|, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}, \delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \dots, \delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$

- $\forall i : \delta_i > 0$: положительно определённая
- $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_{2n-1} < 0, \delta_{2n} > 0, \quad n \in \mathbb{N}$: отрицательно определённая
- $\exists i : \delta_i = 0$: критерий не работает
- Иначе: форма знакопеременная

пример: $x^2 + y^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$

$xy : \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} : \delta_1 = 0$

$x^2 - 2xy + y^2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0$

Достаточное условие локального экстремума: рассмотрим квадратичную функцию аргументов $dx_i, i = \overline{1, m} : d^2u(M_0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j$. Если d^2u положительно определённая, то M_0 - точка локального минимума, если d^2u отрицательно определённая, то M_0 - точка локального максимума, иначе надо доп. исследование

Доказательство:

Пусть d^2u положительно определённая, $k > 0, \forall dx_i \neq 0$

Рассмотрим $\mathring{\Omega}(M_0) : f(M) - f(M_0) = du(M_0) + \frac{1}{2}d^2(M_0) + o(\rho^2) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^i dx_i dx_j + o(\rho^2) =$ (по Тейлору)

$$= \left[M_0(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_m), M(\mathring{x}_1 + dx_1, \dots, \mathring{x}_m + dx_m) \implies \rho^2 = \sum_i dx_i^2 \right] =$$

$= \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^j \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + o(1) \right), \quad h_i := \frac{dx_i}{\rho}, \sum_i h_i^2 = 1, \text{ рассмотрим } Q(h_1, \dots, h_m). \quad Q \text{ непрерывна на сфере, достигает точной нижней грани } k > 0$

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} \left(\underbrace{Q(h_1, \dots, h_m)}_{\geq k} + \alpha(\rho) \right), \alpha \rightarrow 0 \implies \exists \rho_0 > 0 : 0 < \rho < \rho_0, \rho \rightarrow 0 : |\alpha(\rho)| < \frac{k}{2}. \text{ Для}$$

точек $M \in \mathring{\Omega}_{\rho_0}(M_0) : f(M) - f(M_0) > \frac{\rho^2}{2} \left(k - \frac{k}{2} \right) = \frac{\rho^2 k}{4} \implies \exists \mathring{\Omega}_{\rho_0}(M_0) : \forall M \in \Omega f(M) > f(M_0) \implies M_0$
- лок. минимум