Tue Apr 1 10:53:15 MSK 2025

Глава 3. Нихуявные функции

рассмотрим уравнение $y^2 = x^2$. оно задаёт

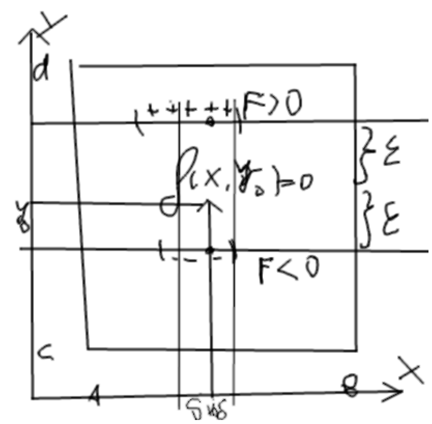
- 2 дифференцируемые функции $y = \pm x$
- 4 непрерывные функции $y = \pm x, \quad y = \pm|x|$
- ∞ разрывных функций

Определение: Пусть дано уравнение $F(x, y) = 0$. Пусть $\forall x \in \mathbb{X}$ однозначно определяется y. Тогда говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = f(x)$ на множестве $\mathbb{X}$

Вопрос: условие существования, единственности и дифференцируемости неявной функции.

Глобальная теорема о существовании, единственности и непрерывности функции: Пусть $F(x, y)$
- определена, непрерывна в прямоугольнике $Q = \{(x, y) : a < x < d \wedge c \leq y \leq d\}$
- $\forall x \in (a, b)$ строгомонотонна как функция y на отрезке $[c, d]$
- $F(x, c) \cdot F(x, d) < 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда $\in Q \exists!\ y = f(x)$ непрерывную и неявную



Замечание: условия теоремы требуют $\exists F(x, y)$ на концах для y, но не для x

Доказательство: т.к. $\forall x \in [a, b]$ $F(x, y)$ является функцией одного аргумента y, а ещё строго монотонна и непрерывна, имеет значения разных знаков на концах интервала $y : [c, d]$, поэтому $\forall x \exists! y_0 \in [c, d] : F(x, y_0) = 0$, то есть $F(x, y_0) = 0$ задаёт единственную функцию $y = f(x)$ при $x \in [a, b] a$

Докажем непрерывность в $\forall x_0 \in [a, b] : \forall ; \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Пусть $f(x, y)$ монотонно возрастает. Т.к. $F(x_0, y_0) = 0$, непрерывна и монотонно возрастает по y, то при $y = y_0 + \varepsilon \implies F(x_0, f(x_0) + \varepsilon) >$, аналогично для $y = y_0 - \varepsilon : F(\dots) < 0$

Теперь рассмотрим 2 функции переменной $x : F(x, f(x_0) \pm \varepsilon)$, одна > 0, другая < 0 при $x = x_0$, $\exists \Omega_\delta(x_0)$, в которой эти функции сохраняют знак и при этом $\forall x \in \Omega_\delta(x_0) : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies f(x)$ непрерывна в точке x_0

локальная теорема: Пусть $F(x, y)$
- определена и непрерывна в $\Omega(M_0),\ M_0(x_0, y_0)$
- в этой окресности $\exists F'_y$ и непрерывна
- $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогдадададададада $\exists$ rect $Q \{(x, y) : |x - x_0| < c \wedge |y - y_0| \leq d \wedge c, d > 0\} \in \Omega(M_0)$, в котором $F(x, y) = 0$ задаёт ! функцию $y = f(x)$, непрерывную на интервале $x \in (x_0 - c, x_0 + c)$

Доказательство: сами на листочках на лекции, поэтому тут нет

Бля, а оно чёт сложное какое-то...))))) Я такую поеботину на листочке написал, что просто пиздец

теорема о дифференцируемости неявной функции: Пусть $F(x, y)$: <Такие же условия, как в локальной теореме> + дифференцируема в M_0. Тогда $\exists Q \{(x, y) : |x - x_0| < c \wedge |y - y_0| \leq d \wedge c, d > 0\} \subseteq \Omega(M_0)$, в котором $F(x, y) = 0$ задаёт неявную $y = f(x)$, дифференцируемую в x_0

Доказательство: $y = f(x)$ в x_0. По услови. $F(x, y)$ дифференцируема в M_0. Зададим приращение $\Delta x, \Delta y,\ x_0 - c < x + \Delta x < x_0 + c,\ \Delta y = f(x_0) + \Delta x - f(x_0)$ (задание приращения Δy таким образом - важно!!!). Рассмотрим $\Delta F(M_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \alpha(\Delta x, \Delta y)_{1,2} \to 0 \implies \alpha(\Delta x, \Delta f)_{1,2} \to 0$

$F'_x(x_0,y_0)\Delta x+F'_y(x_0,y_0)\Delta x+\alpha_1(\dots)\Delta x+\alpha_2(\dots)\Delta y=0=F'_x(x_0,y_0)+F'_y(x_0,y_0)\frac{\Delta f}{\Delta x}+\alpha_1(\dots)+\alpha_2(\dots)\frac{\Delta f}{\Delta x}\implies$ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\dots)}{F'_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\dots)}$,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

Вывод: нихуя не понял, перед сессией буду читать конспект и плакать, но... Я не выспался. Мне можно. Конец лекции. А негры хорошие ребята. И мать ваша тоже хорошая женщина. И вы огромный молодец. Возьмите с полки пирожок, протрите на нём пыль и положите на место.