условный экстремум

Постановка задачи на условны: определить точки жкстремума функции $u(\dots)$ при условии связи:

$$\begin{cases} F_1(\dots) = 0 \\ \vdots \\ F_n(\dots) = 0 \end{cases}$$

Если $M_0(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_m)$ - точка условного экстремума, то в точке M_0 выполняется (УС) [условие связи].

1. пусть F_i' дифференцируема в $\Omega(M_0)$
2. $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ непрерывны в $M_0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, m})$
3. $\left.\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$ (D - якобианы)

Тогда задача об условном экстремуме u сводится к задаче о локальном экстремуме $g(x_{n+1}, \dots, x_m) = u(\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_m)$.

Если $\varphi_i(x_{n+1}, x_m)$ не выражается в явном виде, то можно применить *метод Лагранжа*:
Составим функцию лагранжа $\Phi(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = u(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x_1, \dots, x_m)$. Если M_0 - условный экстремум, то $F_i(M_0) = 0; \Phi = u(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_m)$

Зададим необходимые и достаточные условия условного экстремума:

- **Необходимое условие**: Пусть $u(x_1, \dots, x_m)$ пусть выполнены условия (1)-(3), пусть u дифф. в $\Omega(M_0)$, пусть M_0 - условный экстремум, тогда можно подобрать такие значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\mathring{x}_1, \dots, \lambda_1, \dots) = 0 \quad i = \overline{1, m}$ (т.е. нужно решить систему уравнений с условиями связи + Лагранж).

  Доказательство: Запишем Φ двумя способами:

  1. $d\Phi(\dots) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{dx_i = d\varphi_i} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{x_i \text{ - независимые}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} d\lambda_i}_{= F_i = 0}$
  2. $d\Phi(\dots) = du(M_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i dF_i(M_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n F_i(M_0) d\lambda_i}_{=0}$

  Из этого следует: $\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{dx_i = d\varphi_i} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{x_i \text{ - независимые}} = d\Phi(\dots) = du(M_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i dF_i(M_0) \implies d\Phi = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0} dx_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k}_{\text{зависимые, } dx_i = d\varphi_i, dx_k = d\varphi_k; \quad = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i (????)} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i}_{x_i - \text{независимые}}$. Для того, чтобы все частные производные $\Phi = 0$, надо $\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\right) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\right) \end{cases}$. Так как якобиан системы $\neq 0$, она разрешима, поэтому ВЫВОД:

Чтобы определить точки возможного услового экстремума, надо решить систему уравнений $\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0}_{i=\overline{1,m}}; \underbrace{F_j(x_1, \ldots, x_m) = 0}_{j=\overline{1,n}}$

- **достаточное условие** (следствие теоремы о достаточном условии локального экстремума для функции $g(x_{n+1}, \ldots, x_m)$. $d^2g = \sum_{i,j=n+1}^{m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ - входят только независимые переменные)

  Но у нас нет g, у нас только Φ, только хардкор: $d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} F_i(M_0) d\lambda_i$, в сумме сначала зависимые, потом независимые, потм считаем λ_i независимыми.
  $g = u(\varphi_1(x_{1+n}, \ldots, x_m), \varphi_2(\ldots), \ldots, \varphi_n(\ldots), x_{n+1}, \ldots, x_m); \quad dg(M_0) = d\Phi(M_0), M$ удовл. (УС);
  $g(M) \equiv \Phi(M); \quad d^2g(M) = d^2\Phi(M)$; найдём

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} d\varphi_i d\varphi_j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d^2\varphi_i}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{m} \sum j = 1^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} dF_i d\lambda_i}_{=0} \implies$$

$$d^2\Phi(\mathbf{M_0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot \begin{cases} dx_i dx_j & , i, j = \overline{n+1, m} \\ dx_i \sum k = 1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k & , \begin{cases} i = \overline{n+1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{cases} \\ dx_j \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k & , \begin{cases} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{n+1, m} \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_l & , i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

  БЛЯЯЯЯЯЯТЬ Я ТАК НЕ МОГУУУУУУ

  Не, это пиздец. Я Нихуяяяяяяя не понял... вообще нихуя...