

Глава IV. Двойной интеграл

\$1. Площадь плоской фигуры

Определение: Плоской фигурой $\mathcal{G}$ называется любое множество точек плоскости
понятия, известные со школы:

- Многоугольник $\mathcal{Q}$
- площадь многоугольника $P(\mathcal{Q})$
- $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2 \implies P(\mathcal{Q}_1) < P(\mathcal{Q}_2)$

ОБОЗНАЧЕНИЯ: $\mathcal{Q}_a$ – описанный многоугольник, $\mathcal{Q}_b$ – вписанный, $\mathcal{G}$ – фигура

будем говорить, что многоугольник $\mathcal{Q}_a$ описан вокруг фигуры $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}_a$. При этом если $\mathcal{Q}_b \subset \mathcal{G}$ то $\mathcal{Q}_b$ называется вписанным в фигуру $\mathcal{G}$ (замечание: вписать многоугольник можно не во всякую фигуру).

множество площадей $\{P(\mathcal{Q})\}$ ограничено снизу нулём. При этом, если в фигуру $\mathcal{G}$ можно вписать многоугольники, тогда $\{P(\mathcal{Q}_b)\}$ ограничено сверху $P(\mathcal{Q}_a)$

определение: $\exists \inf \{P(\mathcal{Q}_a)\} := \bar{P}$ – верхняя площадь фигуры $\mathcal{G}$. Так же $\exists \sup \{P(\mathcal{Q}_b)\} := \underline{P}$ – нижняя площадь. Примечание: если в $\mathcal{G}$ нельзя вписать прямоугольник, то $\underline{P} := 0$

утверждение: $\bar{P} \geq \underline{P}$.

Доказательство:

$$\bar{P} = \{P(\mathcal{Q}_a)\} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) : \bar{P} \leq \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) < \bar{P} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

$$\underline{P} = \sup \{P(\mathcal{Q}_b)\} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) : \underline{P} - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) \leq \underline{P} \quad (2)$$

Предположим, что $\underline{P} > \bar{P} \implies \exists \varepsilon > 0 : \underline{P} - \bar{P} > \varepsilon > 0$.

Из (2) – (1) : $\underline{P} - \bar{P} - \varepsilon < \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) - \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) < \underline{P} - \bar{P} \implies \tilde{P}(\mathcal{Q}_b) > \tilde{P}(\mathcal{Q}_a) > 0$ – противоречие

следствие: $\forall P(\mathcal{Q}_b) \leq \underline{P} \leq \bar{P} \leq P(\mathcal{Q}_a)$

определение: плоская фигура называется *квадрируемой*, если $\bar{P} = \underline{P}$. При этом $\bar{P} = \underline{P} = P(\mathcal{G})$ называется **площадью** фигуры $\mathcal{G}$

Теорема: необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b : P(\mathcal{Q}_a) - P(\mathcal{Q}_b) < \varepsilon$. Доказательство:

- Необходимость: $\bar{P} = \underline{P}$; $\underline{P} = \sup \{P(\mathcal{Q}_b)\} : -\underline{P} + \frac{\varepsilon}{2} > -P(\mathcal{Q}_b) \geq -\underline{P}$; $\bar{P} = \inf \{P(\mathcal{Q}_a)\} : \bar{P} \leq P(\mathcal{Q}_a) < \bar{P} + \frac{\varepsilon}{2} \implies 0 = \bar{P} - \underline{P} \leq P(\mathcal{Q}_a) - P(\mathcal{Q}_b) < \varepsilon$
- Достаточность доказали на листочках

\$2. Площадь криволинейной трапеции

Вспомним нижние и верхние суммы Дарбу: $f(x) > 0$; $m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, dk ; sad ; as ; $ld\bar{s} := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$;

$$M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \underline{S} := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i d$$

Лемма дарбу: $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{s} = \underline{I}$; $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S} = \bar{I}$

Необх. и дост. условие интегрируемости: $\bar{I} = \underline{I} = I = \int_a^b f(x) dx$

лемма: для криволинейной трапеции $\underline{P} = \underline{I} = I$; $\bar{P} = \bar{I} = I \implies$ криволинейная трапеция квадрируема $\implies$ есть площадь

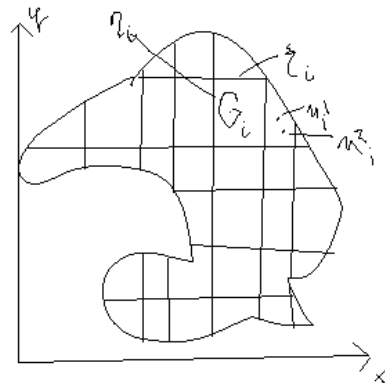
пример неквадроберской фигуры: $|x| + |y| \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}$. $\bar{P} = 2 \neq \underline{P} = 0$

§3. Двойной интеграл

Рассмотрим квадрируемое множество $\mathcal{G}$. Разделим его на непересекающиеся куски $\mathcal{G}_i$ прямыми, параллельными осям ox, oy . при этом $\cup_i \mathcal{G}_i = \mathcal{G}$. Пусть $f(M)$ определена для $M \in \mathcal{G}$. Составим Сумма $I(M_i, \mathcal{G}_i) = \sum_i f(\xi_i, \eta_i) P(\mathcal{G}_i)$. $\mathcal{G}$ квадрируема и ограничена $\Rightarrow \mathcal{G}_i$ ограничены и квадрируемы.

$\forall i \exists \sup \rho(M_i^1, M_i^2), M_i^1, M_i^2 \in \mathcal{G}_i. d_i := \sup \rho(M_i^1, M_i^2)$ называется диаметром $\mathcal{G}_i$; $d := \max_i d_i$ называется диаметром разбиения. если $\exists \lim I(M_i, \mathcal{G}_i)$, то то называется двойным интегралом $f(x, y)$ по $\mathcal{G}$

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$



asdhjasld jhaksdh kja shdka hsdjakhd ajldf aljd asldf jsldfgjksdhjk hd-
jklfjkdsdgsdjh gksdjkgh dfkjgh kjdfh gkjdf hgkjdfh gkjdfh gkjdfh kjdf ghdfjkg sdfl sjdfkl jsdfk jsdfk jsldfhsdjg
sdhkg sdfkghsdfkghksdjh gksdjh g hdsfkg hs dfhg ksdjh gklsdhfkg hsd fkg