Биноминальное Распределение, распределение Гаусса и Пуассона

<На этой лекции у меня был разряжен ноут, поэтому конспекта нет, я хз, перепишу я его из тетради или нет>

Распределение Максвелла

Вероятность того, что скорость в интервале $\begin{cases} (v_x, v_x + dv_x) \to dP = f(v_x)dv_x \\ (v_y, v_y + dv_y) \to dP = f(v_y)dv_y \\ (v_z, v_z + dv_z) \to dP = f(v_z)dv_z \end{cases} \implies$

$\implies dP(v_x, v_y, v_z) = \underbrace{f(v_x)f(v_y)f(v_z)}_{f(v)} dv_x dv_y dv_z$

$\dfrac{\partial}{\partial v_x}(\ln f(v)) = \dfrac{\partial}{\partial v_x}(\ln f(v_x) + \ln f(v_y) + \ln f(v_z)) \implies \dfrac{f'(v)}{f(v)}\dfrac{dv}{dv_x} = \dfrac{f'(v_x)}{f(v_x)} \implies$

$\implies \left[v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \implies \dfrac{\partial v}{\partial v_x} = \dfrac{v_x}{\sqrt{\ldots}} = \dfrac{v_x}{v}\right] \implies \dfrac{1}{v}\dfrac{f'(v)}{f(v)} = \dfrac{1}{v_x}\dfrac{f'(v_x)}{f(v_x)} = \dfrac{1}{v_y}\dfrac{f'(v_y)}{f(v_y)} = \dfrac{1}{v_z}\dfrac{f'(v_z)}{f(v_z)} =: -\alpha$

$\dfrac{f'(v_x)}{f(v_x)}dv_x = -\alpha v_x dv_x \implies \ln(f(v_x)) = -\dfrac{\alpha v_x^2}{2} + C, f(v_x) = C' \exp\left(\dfrac{-\alpha v_x^2}{2}\right)$

$A\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha v_x^2}{2}} dv_x \sqrt{\dfrac{\alpha}{2}} = 1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right] = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\alpha v_x^2}{2}\right)$

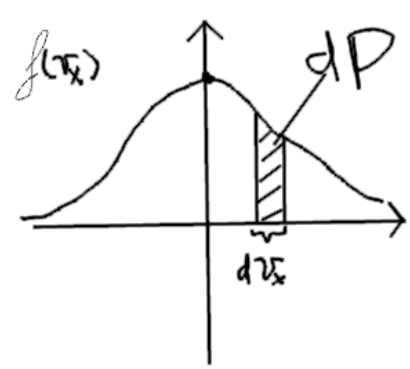
$\left\langle \dfrac{mv^2}{2} \right\rangle = \dfrac{3}{2}kT \implies \langle v^2 \rangle = 3\dfrac{kT}{m}; \quad \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \implies \langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = 3\dfrac{kT}{m} \implies \langle v_x^2 \rangle = \dfrac{kT}{m}$

$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x)dx = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\dfrac{\alpha v_x^2}{2}\right)dv_x = -2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{\alpha v_x^2}{2}\right)dv_x =$

$= \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}(-2)\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{\alpha v_x^2}{2}\right)\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}dv_x}_{\sqrt{\pi}} = -2\sqrt{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{kT}{m} \implies \alpha = \dfrac{m}{kT}$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right); \qquad f(v) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3}\exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

По абсолютным значениям скорости: С одинаковым значением скорости мы образуем "сферу" с одинаковыми скоростями. поэтому вероятность нужно домножить на $4\pi v^2$:



$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$v_{\text{наив.}} = \left[\frac{dF}{dv} = \cdots = 0\right] = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \sqrt{\int_0^\infty v^2F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$